SERIES DE LA EDUCACIÓN MODERNA

ÁLGEBRA ELEMENTAL

SISTEMA PRÁCTICO.

Por
Enrique G. Limric.

SPANISH-AMERICAN
EDUCATIONAL CO.

SAINT LOUIS, MO. E.U de A.

QA
52
76

LIBRARY OF CONGRESS.
QA152
Chap. Copyright No.
Shelf .L76
UNITED STATES OF AMERICA.

SERIES DE LA EDUCACIÓN MODERNA

ÁLGEBRA ELEMENTAL

SISTEMA PRÁCTICO

ADAPTADO ESPECIALMENTE AL USO DE LAS ESCUELAS DE LOS PAÍSES DONDE SE HABLA EL IDIOMA CASTELLANO

POR

ENRIQUE G. LIMRIC,

Profesor de la Asignatura.

MAR 20 1895

16747-aa

SAINT LOUIS, MO., E. U. de A.
SPANISH-AMERICAN EDUCATIONAL CO.
LIBREROS EDITORES
1895.

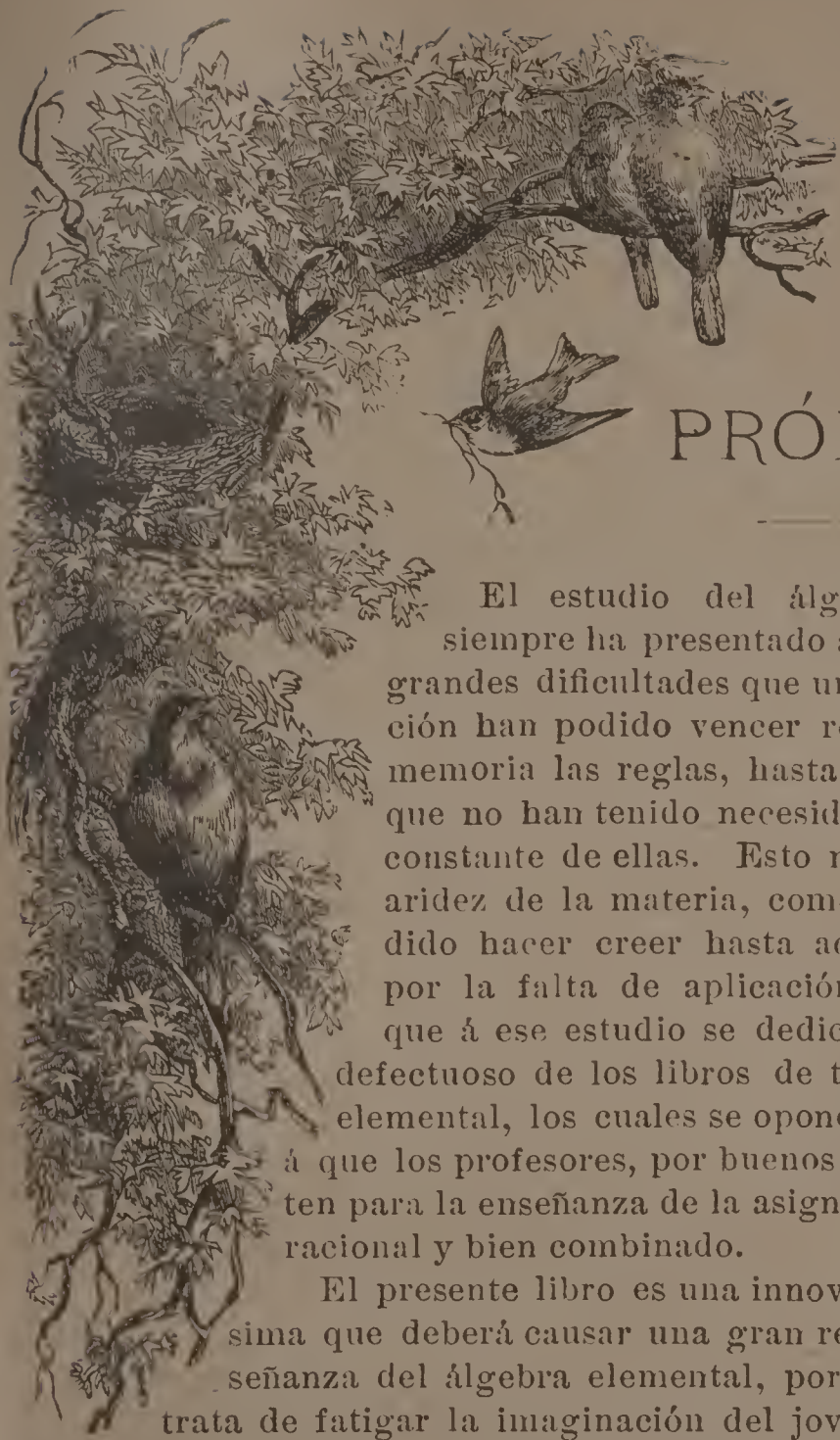
COPYRIGHT 1893 BY THE HISTORY COMPANY.

COPYRIGHT 1895,
BY THE SPANISH-AMERICAN EDUCATIONAL COMPANY.

All Rights Reserved.

Queda hecho el depósito que marca la ley para la protección de la propiedad de esta obra en la República de Méjico.—Méjico, 1892–1895.

La propiedad de esta obra está garantizada por las leyes de España y otros países donde se perseguirán las ediciones fraudulentas.



PRÓLOGO.

El estudio del álgebra elemental, siempre ha presentado á los estudiantes grandes dificultades que una pequeña porción han podido vencer reteniendo en la memoria las reglas, hasta el momento en que no han tenido necesidad de hacer uso constante de ellas. Esto no ocurre por la aridez de la materia, como se ha pretendido hacer creer hasta aquí, ni tampoco por la falta de aplicación de los jóvenes que á ese estudio se dedican; sino por lo defectuoso de los libros de texto en álgebra elemental, los cuales se oponen por completo á que los profesores, por buenos que sean, adopten para la enseñanza de la asignatura un sistema racional y bien combinado.

El presente libro es una innovación ventajosísima que deberá causar una gran reforma en la enseñanza del álgebra elemental, porque en él no se trata de fatigar la imaginación del joven con una acumulación de reglas que más tarde ó más temprano olvida; sino que por lo contrario, empezando por hacer una plena exposición de la forma y valor relativo de las expresiones algebráicas, hace que se llegue á obtener una idea precisa de lo que son y de sus valores en todos los casos; y gradualmente y á medida que avanza en la materia, expone con la misma claridad las diferentes operaciones algebráicas hasta llegar á la resolución de las más complicadas y difíciles ecuaciones.

Tal es la manera lógica, racional y bien combinada con que el autor presenta el álgebra, y no dudamos que con este medio llegarán á obtenerse los resultados más beneficiosos. En primer lugar, porque hace desaparecer con las numerosas reglas é inútiles y fatigosas explicaciones, todo lo que exige de los jóvenes estudiantes una gran memoria que se sobrepone á la comprensión, y mucho más á la convicción de las verdades que se desea sean aprendidas; y en segundo lugar, no teniendo que agotar los recursos de la memoria sin resultado positivo de valor alguno, da al estudiante más ánimo para avanzar en el camino comenzado, porque desde el primer momento ve por sí mismo lo que adelanta y tiene la convicción de saber lo que ha dejado ya atrás.

Así pues, desesos de contribuir un tanto á facilitar la enseñanza de esta asignatura, damos á luz la presente obra la cual esperamos sea acojida con el favor á que la hace merecedora su valor intrínsico.

LOS EDITORES.

ÍNDICE

SUSTITUCION— PÁGINAS.

Sustitución 1–3

ADICION—

Adición de Monomios 4–5
Adición de Polinomios 6–7

SUSTRACCION—

Sustracción de Monomios 8–9
Sustracción de Polinomios 9–11
Paréntesis 11–12

MULTIPLICACION—

Multiplicación de Monomios 13–15
Multiplicación de Monomios por Polinomios 15–16
Multiplicación de Polinomios por Polinomios 16–18

TRES TEOREMAS IMPORTANTES—

Tres Teoremas Importantes 19–20

DIVISION—

División de Monomios por Monomios 21–22
Division de Polinomios por Monomios 22–24
División de Polinomios por Polinomios 24–27

DESCOMPOSICION—

Descomposición de Monomios 28
Descomposición de Polinomios 28–34

MAXIMO COMUN DIVISOR—

Máximo Común Divisor 35

MENOR MULTIPLO COMUN—

Menor Múltiplo Común 36–37

QUEBRADOS—

Simplificación de Quebrados 38–39
Reducción de los Quebrados á Enteros 40–41
Reducción de las Expresiones Mixtas á Quebrados 41–42
Adición de los Quebrados 42–44
Sustracción de los Quebrados 44–46

PAGINAS.

Multiplicacin de los Quebrados..... 46–47
Multiplicar un Entero por un Quebrado..... 47-48
Multiplicar un Quebrado por Otro..... 48–50
Divisin de los Quebrados..... 50–51
Dividir un Entero por un Quebrado..... 51
Para Dividir un Quebrado por Otro..... 51-52

ELEVACION A POTENCIAS—

Elevación de los Monomios á una Potencia Cualquiera 53
Elevación de los Polinomios á una Potencia Cualquiera 53–54

EXTRACCION DE RAICES—

Extraccion de Raices de Monomios..... 55
Extraccion de Raices de Polinomios—Raiz Cuadrada, 55–56
Raiz Cúbica..... 57
Raiz Cuarta..... 58

RADICALES—

Reduccion de los Radicales..... 59-65
Adicion y Sustraccion de Radicales..... 65–66
Multiplicacion de Radicales..... 67–68
Division de Radicales..... 68–69
Elevacion de Radicales á una Potencia..... 69
Extraccion de Raices de Radicales..... 70–71

ECUACIONES—

Ecuaciones de Primer de una Sola Incognita..... 72-76
Ecuaciones que contienen Radicales..... 76–77
Problemas..... 78–90
Ecuaciones de Primer Grado con Dos Incognitas—
Eliminacion por Comparacion..... 91–92
Eliminacion por Sustitucion..... 92–93
Eliminacion por Reduccion..... 93–94
Ejercicios Diversos..... 94-97
Ecuaciones de Primer Grado con Varias Incognitas... 98–100
Problemas.....101–109
Ecuaciones Puras de Segundo Grado.....110–111
Ecuaciones Completas de Segundo Grado.....111–114
Ecuaciones de Segundo Grado con Varias Incognitas.115–118
Ejercicios Diversos.....118–119
Broblemas.....120-127

PROPORCIONES—

Proporciones.....128–131

PROGRESION ARITMETICA—

Progresion Aritmetica.....132–135

PROGRESION GEOMETRICA—

Progresion Geometrica.....136–138

ÁLGEBRA.

I. SUSTITUCIÓN.

Enúnciense las expresiones siguientes, y encuéntrese el valor numérico de cada una, sabiendo que $a=6$, $b=5$, $c=4$, $d=1$:

1. $a^2+2ab-c+d$.
2. $2a^3-3a^2b+c^3$.
3. $3(a^2-b^2)-a(c^{\frac{1}{2}}+d)$.
4. Entre las expresiones $\frac{4ac}{c^2-d}$ y $\sqrt{5a^2-(c^2+4b)}$, ¿Cuál de los signos, $=$, $>$, ó $<$ se debe escribir?

Enúnciense las expresiones siguientes, y encuéntrese el valor numérico de cada una, sabiendo que $a=16$, $b=10$, $c=6$, $m=4$, $x=5$, $y=1$:

5. $(b-x)(\sqrt{a+b})+\sqrt{(a-b)(x+y)}$.
6. $\sqrt{c(a-b)}-\sqrt[3]{c^2(a-b)}$.
7. $50ax^{-\frac{m}{2}}+4a^{\frac{3}{2}}-100\left[a-(2x+\frac{m}{2})\right]$.
8. $3a^{-\frac{1}{2}}+4\left(\frac{2x-y}{x+2y}+\frac{cm}{b-2y}+\frac{y}{a}\right)$.

Sugestión.—Cualquiera potencia de 1 es igual á 1.

9. $3x-\frac{a^2-b^2}{x-y}+\frac{x^2}{b^{-2}}-a^{-\frac{2}{m}}b^2$.

Si se sabe que x es igual á 5, y a igual a 8, ¿ Cuál será el valor numérico de

10. $a\sqrt{x^2-3a}+x\sqrt{x^2-3a}$?

Si se sabe que a es igual á 10, b igual á 8, x igual á 12, é y igual á 4, ¿ Cuál será el valor numérico de

11. $a+b\sqrt{(x-y)}-(a-b)\sqrt[3]{x-y}$?

Si $a=2$, $b=3$, $x=6$, é $y=5$, ¿ Cuál será el valor numérico de

12. $\sqrt{(a+b)y}+\sqrt[3]{(a+x)(y-2a)}+\sqrt[3]{(y-b)^2a}$?

Teniendo las literales a, b, x, é y los mismos valores que las del ejemplo 12, ¿ Cuál será el valor numérico de

13. $(ay)^3(bx+a^2+3)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{\{b(x-y)-[(ax)^2-142]\}\,20ay}{(b-a)^m}$?

Sabiendo que $n=6$, encuéntrese el valor numérico de

14. $\sqrt{10+n}-(10+n)^{\frac{2}{3}}$.

Sabiendo que $m=4$, y $x=9$, encuéntrese el valor numérico de

15. $(5m^{\frac{1}{2}}+5m+5\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}+\sqrt{m+x}^{\frac{1}{2}}$.

Si se sabe que $a=4$, $b=2$, $c=3$, $d=1$, ¿ Cuál será el valor numérico de las siguientes expresiones ?

16. $a^2(a+b)-2abc$.

17. $7a^2+(a-b)(a-c)$.

18. $25a^2-7(b^2+c^2)+d^2$.

19. $c(a^{b+d}+a^{b-d})$.

20. $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{c^2-b^2}{c^2+b^2}$.

21. $\dfrac{25a-30c-d}{b+c}$

22. $a^{\frac{1}{2}}bc+10c^2d-3b^2a^4c^{-2}$.

Sabiendo que $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=\frac{1}{5}$, $x=2$, encuéntrese el valor numérico de las expresiones siguientes :

23. $(2a+3b+5c)(8a+3b-5c)(2a-3b+15c)$.

24. $x^3+\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)x^2+\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)x+\dfrac{2}{b^2}$.

25. $\dfrac{a^2-\frac{b}{2}}{8bc-a}-\dfrac{x}{a+b+c}$.

Sabiendo que $a=1, b=2, c=3, d=4, ye=5$, encuéntrese el valor numérico de las expresiones siguientes :

26. $e^4+6e^2b^2+b^4-4e^3b-4eb^3$.

27. $\dfrac{8a^2+3b^2}{a^2b^2}+\dfrac{4c^2+6b^2}{c^2-b^2}-\dfrac{c^2+d^2}{e^2}$.

28. $\dfrac{b^a+e^c}{c^b-b^c}$.

29. $\dfrac{b^c+d^c}{b^2+d^2-bd}$.

30. $\dfrac{e^c-d^c}{e^2+ed+d^2}$.

II. ADICIÓN.

ADICIÓN DE MONOMIOS.

Regla.—Para sumar varios monomios semejantes que estén precedidos del mismo signo, súmense los coeficientes, y afectando el resultado del signo común, escríbanse á continuación del coeficiente hallado las literales de uno de los términos semejantes sin ninguna variación.

Para sumar varios monomios semejantes que no tengan signos iguales, búsquese la diferencia entre la suma de los coeficientes positivos y la de los coeficientes negativos, y afectando el resultado del signo de la mayor suma, escríbanse á continuación del coeficiente hallado las literales de uno de los términos semejantes sin ninguna variación.

Para sumar varios monomios de los cuales no todos sean semejantes, combínense los términos semejantes, y afectando cado uno del signo correspondiente, escríbanse los demás términos.

Súmense :

1. $3a,\ 5a,\ 2a,\ 6a,\ a.$
2. $7a,\ 6a,\ -11a,\ a,\ -5a,\ -2a.$
3. $-3a,\ -15a,\ -7a,\ 14a,\ -2a.$
4. $2x^2,\ x^2,\ -3x^2,\ 2x^2.$
5. $13m^2n,\ -10m^2n,\ -6m^2n,\ 5m^2n,\ -4m^2n.$
6. $3ax,\ 6ax,\ -ax,\ 2ax,\ -7ax,\ 5ax.$
7. $2by^2,\ -6by^2,\ -by^2,\ 8by^2,\ 3by^2,\ -2by^2.$
8. $6a^2,\ 2a^2,\ -5a^2,\ 4a^2,\ -3a^2,\ a^2.$

9. $5ax^2,\ -2ax^2,\ 3ax^2,\ -9ax^2,\ ax^2.$

10. $27a^2,\ -a^2,\ -28a^2,\ -4a^2.$

11. $13ab,\ -7ab,\ -8ab,\ -6ab.$

12. $3x,\ -y,\ -x,\ 6,\ -8y,\ -2x,\ 4y,\ -5.$

13. $18ax^{\frac{1}{2}},\ -5ax^{\frac{1}{2}},\ -10ax^{\frac{1}{2}},\ 4ax^{\frac{1}{2}},\ -6ax^{\frac{1}{2}}.$

14. $-5c^{\frac{2}{3}}x^2,\ -2c^{\frac{2}{3}}x^2,\ 8c^{\frac{2}{3}}x^2,\ 5c^{\frac{2}{3}}x^2,\ -c^{\frac{2}{3}}x^2.$

15. $5x^{\frac{1}{2}},\ -6x^{\frac{1}{2}},\ -10x^{\frac{1}{2}},\ 3x^{\frac{1}{2}},\ 11x^{\frac{1}{2}}.$

16. $-2a\sqrt{x},\ a\sqrt{x},\ -3a\sqrt{x},\ 7a\sqrt{x},\ -4a\sqrt{x}.$

17. $-2m^{\frac{1}{2}},\ 4a\sqrt{m},\ 3am^{\frac{1}{2}},\ -a\sqrt{m}.$

18. $10a^{\frac{8}{3}}x^{\frac{1}{3}},\ -4a^{\frac{8}{3}}x^{\frac{1}{2}},\ -2a^{\frac{8}{3}}x^{\frac{1}{3}},\ x^{\frac{1}{3}},\ 4a^{\frac{8}{3}}x^{\frac{1}{3}}.$

19. $1\frac{1}{2}am,\ 2\frac{1}{2}am,\ -3am,\ am.$

20. $27a^{\frac{2}{3}},\ -a^{\frac{2}{3}},\ -28a^{\frac{2}{3}},\ -4a^{\frac{2}{3}}.$

21. $3m^2,\ -\frac{3}{4}m^2,\ m^2,\ -\frac{5}{6}m^2.$

22. $7\sqrt{x},\ -5\sqrt{x},\ 12\sqrt{x},\ -3\sqrt{x}.$

23. $9b,\ \frac{3}{4}b,\ -\frac{5}{8}b,\ -8b,\ -\frac{5}{4}b.$

24. $3a^{\frac{1}{4}},\ 4a^{\frac{1}{4}},\ -6a^{\frac{1}{4}},\ -10a^{\frac{1}{4}},\ 7a^{\frac{1}{4}},\ -9a^{\frac{1}{4}}.$

25. $-6a^{\frac{2}{3}}b^2\sqrt[3]{c^2},\ 8a^{\frac{2}{3}}b^2c^{\frac{2}{3}},\ -2a^{\frac{2}{3}}b^2c^{\frac{2}{3}},\ -7\sqrt[3]{a^2}b^2\sqrt[3]{c^2}.$

26. $3a^2b,\ -x^2y^{\frac{1}{2}},\ 3x^2\sqrt{y},\ -5a^2b,\ 2x^2y^{\frac{1}{2}},\ -2a^2b,\ -4\sqrt{y}x^2$

27. $10,\ 8u^2,\ -5u^2,\ -3,\ 7u^2,\ -3u^2,\ 5,\ u^2.$

28. $6\sqrt{x+y},\ -3(x+y)^{\frac{1}{2}},\ 9(x+y)^{\frac{1}{2}},\ -4\sqrt{x+y},\ 5\sqrt{x+y}.$

29. $-2c^2m^{\frac{1}{2}},\ 4cm,\ -6c^{\frac{1}{2}}m^2,\ 10c^2m.$

30. $7a^{-2}b,\ -32x^{-\frac{2}{3}},\ 6mn,\ -5a^2.$

ADICIÓN DE POLINOMIOS.

Regla.—Para sumar polinomios se ponen los términos que son semejantes en la misma columna, y en seguida se hace la suma de cada columna, teniendo cuidado de afectarla del signo correspondiente.

Súmense :

1. $5a+3b+c,\ 3a+3b+3c,\ a+3b+5c.$

2. $7a-4b+c,\ 6a+3b-5c,\ -12a+4c.$

3. $a+b-c,\ b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c,\ c-a-b.$

4. $a+2b+3c,\ 2a-b-2c,\ b-a-c,\ c-a-b.$

5. $16ac-2m+xy,\ -2ac+3m-5xy-d,\ -4ac-6m-3xy,\ -3ac+8xy+2mn.$

6. $6x+5ay,\ -3x+2ay,\ x-6ay,\ 2x+ay.$

7. $-3ay-7,\ -ay+8,\ 2ay-9,\ -3ay-11,\ 10ay-23.$

8. $-3ab+7x,\ 3ab-10x,\ 3ab-6x,\ -ab+9x,\ 2ax+4x.$

9. $6ab+12bc-8cd,\ 3cd-7ab-9bc,\ 12cd-2ab-5bc.$

10. $6x-5b+a+8,\ -5a-4x+4b-3.$

11. $a+2b-3c-10,\ 3b-4a+5c+10,\ 5b-c.$

12. $3a+b-10,\ c-d-a,\ -4c+2a-3b-7.$

13. $7m+3n-11p,\ 3a-9n-11m,\ 8n-4m+5p,\ 6n-m+3p.$

14. $7a-3b+c+m,\ 3b-7a-c+m.$

15. $x+y-z,\ y-x+z.$

16. $2a-3b+5c,\ b-5c+2d.$

17. $4mn+3ab-4c,\ 3x-4ab+2mn,\ 3m^2-4x.$

18. $2a-3b+4d,\ 2b-3d+4c,\ 2d-3c+4a+4b,\ 2c-3a.$

19. $6x-3y+7m,\ 2m-x+y,\ 2y-4x-5m-9n,\ m-2x.$

20. $3x-2y-z,\ 6y-5x-7z,\ 8z-y-x,\ 4x-9y.$

21. $6amx-3b+4cxy-2ax^2,\ \ 4b-3cxy+5ax^2,\ \ 11cxy-xy-8amx$
$-3ax^2,\ 5xy-6b.$

22. $2xy-2x^2,\ 3x^2-xy,\ x^2+xy,\ 4x^2-3yx.$

23. $2ax-30,\ 3x^2-2ax,\ 5x^2-3x^{\frac{1}{2}},\ 3\sqrt{x}+10.$

24. $8a^2x^2-3ax,\ 7ax-5xy,\ 9xy-5ax,\ 2a^2x^2+xy.$

25. $-6a^2+2b,\ \ -3b+2a^2,\ \ -8b,\ 4a^2-2b,\ 9b-3a^2-5a^2.$

26. $6a-6(a-b)+7,\ 3a+12(a-b)-8,\ 2(a-b)-3a-20.$

27. $7(m+3)-16(m+3),\ 8(m+3)+7(m-3),\ 3(m-3)-4(m+3).$

III. SUSTRACCIÓN.

SUSTRACCIÓN DE MONOMIOS.

Regla.—Para restar un monomio de otro se cambia el signo del sustraendo, y en seguida se procede como en la adición de monomios.

1.	De $50a$	réstese $27a$.
2.	De $27b$	réstese $13b$.
3.	De $5a^2b$	réstese $14a^2b$.
4.	De $-13y$	réstese $4y$.
5.	De $17x$	réstese $-11x$
6.	De $-10mn$	réstese $-18mn$.
7.	De $-2ab$	réstese $9ab$.
8.	De xy	réstese $-cd$.
9.	De $17m^3$	réstese $41m^3$.
10.	De $-5x$	réstese $3x$.
11.	De $-x^2y^2$	réstese $5x^2y^2$.
12.	De $-70abc$	réstese $-52abc$.
13.	De $5nb$	réstese $-8nb$.
14.	De $-7m^2$	réstese $-8n^2$.
15.	De $-33x^3y^2$	réstese $29x^3y^2$.
16.	De $9ab$	réstese $-2ab$.
17.	De $7m$	réstese $4m$.
18.	De $17x^2y$	réstese $-4x^2y$.
19.	De $abcd$	réstese $-abcd$.

20. De $25gm$ réstese $28gm$.

21. De $-16b^2x^2$ réstese $4b^2x^2$.

22. De $-11sq^2$ réstese $-12sq^2$.

23. De $30xy$ réstese $40xy$.

24. De $-75mn^2$ réstese $-25mn^2$.

25. De $-18pqr$ restese $-17pqr$.

26. De $14bx^2y$ réstese $17bx^2y$.

27. De $-h^2$ réstese $27h^2$.

28. De $5(a+b)$ réstese $2(a+b)$.

29. De $-5a(c-m)$ réstese $7a(c-m)$.

30. De $-11(x^2-y)$ réstese $-5(x^2-y)$.

31. De $-5a(m-n)$ réstese $-12(m-n)$.

32. De $15x^2y^3z$ réstese $-3x^2y^3z$.

33. De $-157m^3nq$ réstese $-16m^3nq$.

34. De $150a^2bc$ réstese $172a^2bc$.

35. De $12(x^2-y^2-z^2)$ réstese $7(x^2-y^2-z^2)$.

36. De $15\,ab(p-q)$ réstese $12ab(p-q)$.

37. De $m^2(c-1)$ réstese $-2m^2(c-1)$.

38. De $-8s^{\frac{1}{2}}k^3(a-3x)$ réstese $5s^{\frac{1}{2}}k^3(a-3x)$.

39. De $2c^de^3(a^2-c^3)$ réstese $9c^de^3(a^2-c^3)$.

40. De $-4b(4t+6)$ réstese $5b(4t+6)$.

SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS.

Regla.—Para restar un polinomio de otro se cambian los signos á todos los términos del sustraendo, y en seguida se procede como en la adición de polinomios.

1. De $a+4x-6c$ réstese $4a+2x-c$.
2. De $3ax+2y$ réstese $xy-2y$.
3. De $2x^2-3x+y^2$ réstese $a+4x-x^2$.
4. De $7a+2-5c$ réstese $c+2-a$.
5. De $-xy+12$ réstese $8xy-20$.
6. De $7a^2x+a$ réstese $3a^2x-2a$.
7. De $-8x-2y+5$ réstese $10x-3y+4$.
8. De $7m^2-4ab-c$ réstese $2m^2+3c-8ab-s$.
9. De $a+2x$ réstese $a-x$.
10. De $b+a$ réstese $4a+4b$.
11. De $4a-4b$ réstese $3a+5b$.
12. De $2x+b^2+2xy-5$ réstese $4x-3b^2+2xy-17$.
13. De $2a-2b-3c$ réstese $6a-2b-c$.
14. De $a-b+c$ réstese $a+b-c$.
15. De $7a^2-5a+6b-10a^2b^3$ réstese $3a^2b^3+11a-5a^2+6b$.
16. De $15ax+2b^2y-6a^2x^2$ réstese $-5ax-4b^2y-3a^2x^2$.
17. De $2a+7b+c-b$ réstese $3a-2b+3c$.
18. De $a^2+2ab+b^2$ réstese $a^2-2ab+b^2$.
19. De $c+2a-d$. réstese $3a+b+c-d-10$.
20. De $8a^{\frac{1}{2}}b^{-2}-3xy+15-2\sqrt{xy}$ réstese $8+10xy-3a^{\frac{1}{2}}b^{-2}+2\sqrt{xy}$.
21. De $11abc+3x+7y+100$ réstese $7abc-11x+5y-48$.
22. De $7x^2-8x-1$ réstese $5x^2-6x+3$.
23. De $3a+b+c-d-10$ réstese $b-10+3a$.
24. De $4a^2x^{\frac{1}{2}}-3c+12b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}$ réstese $8b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}+4a^2x^{\frac{1}{2}}-2d$.
25. De $4x^4-2x^3-2x^2+7x-9$ réstese $x^4-3x^3-2x^2-7x+9$.

26. De $3m + y^2 - 5a - 7$ réstese $5m - 3y^2 + 7a - 6$.

27. De $2ab + b^2 - 4c + bc - b$ réstese $3a^2 - c + b^2$.

28. De $-6mp - 5c + 5t$ réstese $5mp + 5c - 5t$.

29. De $-3(z - x)(a + c)$ réstese $-2(z - x)(a + c)$.

30. De $6m(c + n - z)$ réstese $9m(c + n - z)$.

PARÉNTESIS.

Regla.—Para quitar el paréntesis á una expresión que está precedida del signo $-$, se cambia el signo á todos los términos que están dentro del paréntesis, y en seguida se quita éste. Si está precedida del signo $+$, se quita el paréntesis sin cambiar los signos de los términos que encierra.

Cuando una expresión tiene más de un paréntesis, se quita primero el paréntesis más interior, y en seguida se quita el más interior de los que quedan, y así sucesivamente.

Quítense los paréntesis á las expresiones siguientes, y combínense los términos :

1. $(4ab - 3c^2 + 2bc) - (2ab - 2c^2 - bc)$.

2. $x - \{b - (c - y)\}$.

3. $a - \left[b - \{c + (d - \overline{e - f})\}\right]$.

4. $(4ab^2 - 3b^2c) - (2ab^2 - 6b^2c)$.

5. $(c + d) + (d + e) - (c + e)$.

6. $(5a^3 - 3ac^2) - (2ab + 2a^3 - 3ac^2)$.

7. $(2a - b - c) - (a - 2b + c)$.

8. $(2c - f) - (2f - z) - (2z - c)$.

9. $(a - x - y) - (b - x + y) - (c + 2y)$.

10. $(2a - b + 3c) + (a - b - 4c) - (3a - 2b - c)$.

11. $(3m - n + 7p) - (2m + 3n) - (5n - 4p) + (3p - m)$.

12. $2 - (2 - x) + (2 - x + x^2) - (2 - x + x^2 - x^3)$.

13. $x - \{2y - (3z - 2y) - x\}$.

14. $2c - \{d - (c - 2d)\}$.

15. $3x - \{y + (2x - y) - (x - y)\}$.

16. $7a - [3a - \{4a - (5a - 2a)\}]$.

17. $2m + (y - 3n) - \{(3m - 2y) + n\} + 5m - (4y - 3n)$.

18. $\{(3x - 2y) + (4z - x)\} - \{x - (2y - 3x) - z\} + \{a - (b - 5c - a)\}$.

19. $a - [2a + (3a - 4a)] - 5a - \{6a - [(7a - 8a) - 9a]\}$.

20. $2x - (3y + 2z) - [5y - (6z - 6y) + 5z - \{2x - (z + 2y)\}]$.

21. $m - [2n + \{3p - 3m - (m + n)\} + \{2m - (n + p)\}]$.

22. $16 - a - [7a - \{8a - (9a - \overline{3a - 6a})\}]$.

23. $2c - [3d + (2d - e) - 4e + \{2c - (3d - \overline{e - 2d})\}]$.

24. $a - [2b + \{3c - 3a - (a + b)\} + 2a - (b + 3c)]$.

25. $x - [5y - \{x - (3z - 3y) + 2z - (x - 2y - z)\}]$.

IV. MULTIPLICACIÔN.

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS.

Regla.—Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes; las literales diferentes se ponen unas á continuación de otras, y en las iguales se suman sus exponentes, afectando el producto del signo *más* cuando los monomios tienen signos iguales, y del signo *ménos* cuando los tengan desiguales.

Multiplíquese:

1. $3x$ por $7a$.
2. $4y$ por $3ab$.
3. $15bc$ por $10x$.
4. $3ax$ por $-4by$.
5. $6ax$ por $12by$
6. $17cd$ por $3m$.
7. $4pq$ por $7xy$.
8. $12am$ por $5bcd$.
9. $25pqs$ por $3xyz$.
10. $-8cm$ por dn.
11. $-7ab$ por $2ac$.
12. a^3 por a^5.
13. x^4 por x^6.
14. y^5 por y^5.
15. $3a^2bx$ por $2cb^3y$.

16. $3abxy$ por $2a^4bx^3$.

17. $-3a^2c$ por $-2by$.

18. ax^3 por $-2y^2$.

19. $2b^2n$ por $-mn^2$.

20. a^3b^2c por $-5a^2bd$.

21. $-11x^m$ por $-8x^m$.

22. $3a^mb^n$ por $-5a^nb^n$.

23. mx^n por $-3ax^2$.

24. $-a^2bc$ por $2b^2cd$ por $-5a^3cd$.

25. $3y^4z^2$ por $-x^3z$ por $6xy$.

26. $4x^my^n$ por $-x^ny^nz^5$ por $15y^2z^r$.

27. $-7m^2$ por $10c^2m^3z$.

28. $-5a^2m$ por $3ab^2c$ por $2bc^2m^2$,

29. $5a^{\frac{1}{3}}b^2$ por $7a^{\frac{1}{3}}b^{-2}c$.

30. $309a^{\frac{1}{m}}b^m$ por $9a^{\frac{2}{m}}b^n$.

31. $x^{\frac{2}{3}}$ por $x^{-\frac{1}{2}}$.

32. x^m por x^{-m}.

33. a^2b^{-c} por a^3bc.

34. $\sqrt{ax}$ por a^2x.

35. $-5x^{-1}y^{-2}$ por $-3x^2y^3$

36. $13x^{\frac{1}{n}}$ por $-5x^{\frac{1}{m}}$.

37. $-9x^2y^2$ por $-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$.

38. $3(x+y)$ por 2.

39. $a(x^2+m)$ por b.

40. $(a+m)^2$ por c.

41. $(a+b)^3$ por $(a+b)^2$.

42. $3a(m-n)^2$ por $-2a(m-n)$.

43. $4m(x^2-y^2)^3$ por $-2m^3(x^2-y^2)$.

44. $(a-b)^3$ por $(a-b)^m$.

45. a^{c+2} por $-a^{c-2}$.

46. $-3a^{-2}bc^{\frac{1}{2}}$ por $-5a^2b^{-1}c^2$.

47. $a^m(s+t)^2$ por $a^2(s+t)^n$.

48. $7y^{-2}(z+c)^{-4}$ por $2y^2(z+c)^5$.

49. $(\mathrm{a}+\mathrm{b})^{-\frac{1}{2}}$ por $(b+a)^2$.

50. $c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}y^{-2}$ por $c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}y^3$.

MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS POR POLINOMIOS.

Regla.—Se multiplica cada término del polinomio por el monomio, precediendo del signo correspondiente á cada uno de los productos parciales.

Multiplíquese :

1. $2x^2-5x-7$ por $8x^3$.

2. $2a-3b+4c$ por $3a$.

3. $6a-5b$ por $3c$.

4. $3a^2b-4ab^3$ por $-5ab^4$.

5. $3x^2-4y^2+5z^2$ por $2x^2y$.

6. $12x-2ac$ por $4a$.

7. $3x-5$ por $4x$.

8. $8a^2-9ab$ por $3a^2$.

9. $2a^2-3c+5$ por bc.

10. a^2b-ab^2 por $-ab$.

11. $2+3a-4a^2-5a^3$ por $6a^2$.

12. $3a^2-2x^2-6b$ por $2ax^2$.

13. $8a^2bc-d$ por $5ad^2$.

14. $a^3x-5a^2x^2+ax^3+2x^4$ por ax.

15. $a^2-2ax+1$ por $4x^2$.

16. $5x^3-4x^2-3x+2$ por $-6x^5$.

17. a^2b^2 por $a^3-3a^2b-3ab^2+b^3$.

18. $-6a^2c-8a^3+5$ por $-6ac$.

19. $a^2b^2+2ab-3$ por $-a^4$.

20. $-x^4-10x+5$ por $2x^3$.

21. $13xy-3b$ por $25x^2$.

22. m^2+mn+n^2 por m^2n^2.

23. $2a^2c-4x-8$ por $-3ac$.

24. $13a^2-b^2c$ por $-4c$.

25. $5b^3c-2a+ax-5$ por $7bx^2$.

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS POR POLINOMIOS.

Regla.—Para multiplicar dos polinomios, se multiplican todos los términos de uno de los factores por cada uno de los términos del otro, y se suman los productos parciales.

Multiplíquese :

1. $3a-2b$ por $2a-5b$.

2. x^2+1-x^3-x por $1+x$.

3. $a+b+c$ por $x+y+z$.

4. x^2-4 por x^2+5.

5. $3x+2$ por $5x-7$.

6. $6x-5$ por $3-2x$.

7. $3a-2b$ por $4b-2a$.

8. $3a^2-2ab-b^2$ por $2a-4b$.

9. $a^4+a^2x^2+x^4$ por a^2-x^2.

10. $2ac^2-3by$ por $2c^3-3y^2$.

11. x^2+xy-y^2 por $x-y$.

12. a^2-b^2 por a^2+b^2.

13. $5x+4y$ por $3x-2y$.

14. $2a-3b+4c$ por $3a+2b-5c$.

15. a^3-x^3 por m^2-n^2.

16. $2a^2+2a+5$ por a^2-a.

17. $a+b-c$ por $m-n$.

18. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ por a^2-b^2.

19. $1+x+x^2+x^3$ por $ax-a$.

20. $3x^2-2xy-y^2$ por $2x-4y$.

21. $x^2-4x+16$ por $x+5$.

22. $x^3-50x-100$ por $x+2$.

23. $2x^2+3x-1$ por $2x^2-3x+1$.

24. x^2+2x+1 por x^2-2x+3.

25. $m^2-n^2+p^2$ por m^2+n-p^2.

26. $3m^3+3n^3+9mn^2+9^2n$ por $6m^2n^3-2mn^4-6m^3n^2+2m^4n$.

27. $4x^7y-32xy^4-8x^5y^2+16x^3y^3$ por $x^6y^2+4x^2y^4+4x^4y^3$.

28. $(a-b+c)^2-\left\{a(c-a-b)-\left[b(a+b+c)-c(a-b-c)\right]\right\}$ por $3c$.

29. $5x^4 + 2x^2y^2 + xy^3 - 3x^3y$ por $5x^3y - 2xy^3 + 3x^2y^2 + y^4$.

30. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$ por $a + b + c$.

31. $2x^{-\frac{1}{2}} - 3y^{\frac{2}{3}}$ por $2x^{-\frac{1}{2}} + 3y^{\frac{2}{3}}$.

32. $3a^{m-1} - 2b^{n-2}$ por $2a - 3b^2$.

33. $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}$ por $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}$.

34. $a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{2}{3}}$ por $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}$.

35. $2x^{m-p}y^{-3p} + x^{-2p}y^p$ por $3x^my^{3p} - x^{3p}y^{-3p}$.

V. TRES TEOREMAS IMPORTANTES.

1. El cuadrado de la suma de dos cantidades, es igual al cuadrado de la primera, más el doble producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda.

¿Cuál es el cuadrado de las expresiones siguientes?

1. $a+c$.
2. $x+y$.
3. $3a+2x$.
4. $m+z$.
5. $2a+c$.
6. $2c+3d$.
7. $5x+3$.
8. $x+x$.
9. $a+1$.
10. a^2x+ax^2.
11. $4a+\frac{1}{2}x$.
12. y^2+20.
13. x^m+y^n.
14. c^m+1.
15. $3x+2y$.
16. $3ax+4x^2$.
17. $1+7a$.
18. $5xy+2$.
19. $ab+cd$.
20. $3mn+4$.
21. $12+5x$.
22. $4xy^2+5yz^2$.
23. $3abc+bcd$.
24. $4x^3+xy^2$.
25. $1+3ab^3$.
26. $4a^{\frac{1}{2}}+2x$.
27. $x^{-\frac{2}{3}}+xy$.
28. $5a^{-2}+3a^3b^2$.
29. $\frac{1}{2}ab^{-2}+\frac{2}{3}x^{-1}b^{-1}$.
30. $x^{-1}y^2+3ab^{-2}$.

2. El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera, menos el doble producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda.

¿ Cuál es el cuadrado de las expresiones siguientes ?

1. $a-b$.
2. $3c-5c^2$.
3. $\frac{1}{2}x-3a$.
4. $3m-2x$.
5. $\frac{1}{3}a^{-1}-b^{\frac{1}{2}}$.
6. $2x-3c$.
7. $x^{-1}y-2y^2$.
8. $2a^{\frac{m}{n}}-3b^{-\frac{1}{n}}$.
9. $m^{-p}-n^{-q}$.
10. $3a^{-\frac{1}{m}}-2b^{-\frac{m}{n}}$.
11. $a+b-c$
12. $x-y+z$.
13. c^2-d+o.
14. $m^2-n^2-s^2$.
15. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$.

3. La suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, es igual á la diferencia de sus cuadrados.

Multiplíquense :

1. $(a+2b)(a-2b)$.
2. $(3mn+4)(3mn-4)$.
3. $(2x+3c)(2x-3c)$.
4. $(7a+2b)(7a-2b)$.
5. $(3ax+4x^2)(3ax-4x^2)$.
6. $\left(2x^{\frac{m}{n}}+3y^{-\frac{1}{n}}\right)\left(2x^{\frac{m}{n}}-3y^{-\frac{1}{n}}\right)$.
7. $\left(m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}\right)\left(m^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{2}}\right)$.
8. $\left(3m^2n^3+2m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{3}{4}}\right)\left(3m^2n^3-2m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{3}{4}}\right)$.
9. $(\frac{1}{2}ab^{-2}+\frac{2}{3}x^{-1}b^{-1})(\frac{1}{2}ab^{-2}-\frac{2}{3}x^{-1}b^{-1})$.
10. $\left(x^{\frac{2}{3}}+xy\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-xy\right)$.

VI. DIVISIÓN.

DIVISIÓN DE MONOMIOS POR MONOMIOS.

Regla.—Para dividir un monomio por otro, se divide el coeficiente numérico del dividendo por el del divisor, las literales se ponen unas á continuación de otras, afectando cada una de un exponente igual al exponente del dividendo ménos el del divisor, y haciendo desaparecer todas aquellas cuyos exponentes llegan á ser cero.

El cociente llevará el signo +, cuando el dividendo y el divisor tengan signos iguales; y el signo −, cuando los tengan desiguales.

Divídase:

1. $54a^7$ por $-9a^4$.
2. $-2a^3b^2cd^4$ por abd^4.
3. $-91x^my^nz^r$ por $-13x^ny^nz^3$.
4. $-a^2c$ por ac.
5. $2m^3n^4$ por $-mn^3$.
6. $-8x^2y^2$ por $-4x^2$.
7. $30a^5b^3$ por $5a^2b$.
8. $14m^3n^4$ por $-7mn^3$.
9. $-18x^2y^5z$ por $9x^2y$.
10. $-65a^3b^3c^3$ por $-5ab^2c^3$.
11. $72m^5n$ por $-12m^2$.
12. $-18a^mb$ por $6ab$.
13. $-144c^5d^7e^6$ por $-36c^2d^3e$.

14. $-3a^{m+2}$ por a^{m+1}.

15. $a^{m+n}b^{m+n}$ por $a^m b^n$.

16. $-91x^4y^3z^2$ por $-13x^3y^2$.

17. $18m^3n^4p^5$ por $-2m^2np^5$.

18. $12a^3x^4b$ por $3a^2x^2$.

19. $12b^7c^3y^3$ por $4bc^2y^3$.

20. $8cdx$ por dx.

21. $10a^5cx^2y$ por $5a^4x^2$.

22. $18a^3b^2x$ por $-3a^2bx$.

23. $-20x^3y^4$ por $-5x^2y^2$.

24. $-42a^3m^2y^3$ por $7a^2m^2$.

25. $-81a^5bx^2y$ por $9a^4by$.

26. $-13x^2y^2$ por $-13xy^2$.

27. $5a^{-2}b^4$ por $2ab$.

28. $6a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ por $3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$.

29. $17a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}$ por $11a^{-2}b^{-1}x^3$.

30. $a^rb^qc^{-s}$ por ab^2c^3.

DIVISIÓN DE POLINOMIOS POR MONOMIOS.

Regla.—Para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio, precediendo cada uno de los cocientes parciales del signo correspondiente.

Divídase:

1. $15a^3x^2 + 24a^2x^3b - 12a^5xc$ por $3ax^3$.

2. $3a^3b^2 - 18a^4b^2 + 6a^2b$ por $3ab$.

3. $24x^2y^2 - 8x^4y^5 - 24xy^2$. por $8x$.

4. $21a^3x^3 - 7a^2x^2 + 14ax$ por $7ax$.

5. $42a^3 - 11a^2 + 28a$ por $7a$.

6. $9k^{14} - 24k^3c + 48k^5$ por $3k^4$.

7. $72a^5c^2 - 48a^7c^4 - 32a^9c^5$ por $16a^3c^3$.

8. $36m^{\frac{7}{2}} - 48m^{\frac{3}{4}}$ por $4m^{\frac{1}{3}}$.

9. $m^{\frac{3}{4}} - m^{\frac{3}{5}}n^{\frac{2}{3}}$ por $m^{\frac{1}{4}}$.

10. $8a^3bc + 16a^5bc - 4a^2c^2$ por $4a^2c$.

11. $9a^3b - 6a^4c + 12a^2bc$ por $-3a^2$.

12. $7ax + 7ay - 7ad$ por $-7a$

13. $3ax^3 + 6x^2 + 3ax - 15x$ por $3x$.

14. $9x^4 + 27x^3 - 21x^2$ por $-3x^2$.

15. $21ax - 18bx + 15cx$ por $-3x$.

16. $12x^5 - 8x^3 + 4x$ por $4x$.

17. $3x^3 - 6x^5 + 9x^7 - 12x^9$ por $3x^2$.

18. $4a^4b - 6a^3b^2 + 12a^2b^3$ por $2a^2b$.

19. $3ab^4c + 12ab^5x - 3a^2b^7$. por $3ab^3$.

20. $25a^2bx - 15a^2cx^2 + 5a^3bcx^2$ por $-5a^2x$.

21. $20a^3b^3 + 15a^3b^2 + 10a^3b + 5a$ por $5a^3$.

22. $21a + 35b - 14$ por -7.

23. $9acx^2 - 12a^2bc - 6ab^2c$. por $-3ac$.

24. $2x^3y^2z - 12xy^2z^3$ por $-2xy^2z$.

25. $5a^2bc - 5ab^2c + 5abc^2$ por $-5abc$.

26. $4x^7 - 8x^6 - 14x^5 + 2x^4 - 6x^3$ por $2x^3$.

27. $20x^4 - 12x^2 - 28x$ por $4x$.

28. $-a^2b^2c - ab^2c^2 + a^2bc^2$ $\quad -abc.$

29. $9a^5bc - 3a^2b + 18a^3bc$ $\quad$ por $-3ab.$

30. $15x^my^nz^r - 35x^{m+2}y^{2n}z.$ $\quad$ por $5x^my^nz.$

31. $a^{\frac{5}{6}} - a^{\frac{1}{6}}b^2 + a^{\frac{4}{6}}$ $\quad$ por $a^{\frac{1}{6}}.$

32. $11a^{\frac{5}{9}} - 33a^{\frac{4}{3}}$ $\quad$ por $11a^{\frac{2}{9}}.$

33. $a^{m+1} - a^{m+2} - a^{m+3} - a^{m+4}$ $\quad$ por $a^3.$

34. $5x^{\frac{m}{n}} - 10x^{-m} + 15x^{\frac{1}{n}}y.$ $\quad$ por $5x^2.$

35. $6(a+x) + 9(x+y)$ $\quad$ por 3.

36. $12(a+x) - 3c(a+x) + d(a+x)$ $\quad$ por $(a+x).$

37. $(a+c)^2 - (a+c)^5$ $\quad$ por $(a+c).$

38. $12(a+b) + 6c(a+b) + 2(a+b)$ $\quad$ por $(a+b).$

39. $(m-n)x^2 + (m-n)a^2 + (m-n)c^2$ por $(m-n).$

40. $(1-x) - (1-x)^2$ $\quad$ por $(1-x).$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS POR POLINOMIOS.

Regla.—Para dividir un polinomio por otro, se ordenan los términos del dividendo y los del divisor con respecto á las potencias decrecientes de una misma literal: en seguida, dividiendo el primer término del dividendo por el primero del divisor, conforme á las reglas dadas relativas á los signos, coeficientes. literales y exponentes en la división de los monomios, se obtiene el primer término del cociente: se multiplican todos los términos del divisor por el del cociente, y el producto se resta del dividendo, para determinar la primera resta: en seguida se bajan cuantos términos sean necesarios para formar un nuevo dividendo, y se procede con este nuevo dividendo lo mismo que con el primero, continuando la operación hasta

que se obtenga cero por resta, ó hasta que el primer término de la resta, después de haberla ordenado, no sea divisible por el primero del divisor.

Divídase:

1. $a^2+2ab+b^2$ por $a+b$.
2. a^2-b^2 por $a+b$.
3. $a^2-2ab+b^2$ por $a-b$.
4. $4a^4x^2-4a^2x^4+x^6-a^6$ por x^2-a^2.
5. $x^2-7x+12$ por $x-3$.
6. $2a^4+5a^2b^2+2a^3b-6ab^3+4b^4$ por $a^2+2ab+4b^2$.
7. $a^3-3a^2y+3ay^2-y^3$ por $a-y$.
8. $a^3+5a^2b+5ab^2+b^3$ por $a+b$.
9. $6a^2x^2+x^4-4ax^3+a^4-4a^3x$ por x^2+a^2-2ax.
10. $21x^2y^2-22xy-8$ por $3xy-4$.
11. $2y^3-19y^2+26y-16$ por $y-8$.
12. $x^4-a^2x^2+2a^3x-a^4$ por x^2-ax+a^2.
13. x^2+x-72 por $x+9$.
14. $x^3-3x^2z+z^3$ por $x-z$.
15. $8+18x^4-56x^2$ por $-6x^2+4+8x$.
16. $2x^3-x^2+3x-9$ por $2x-3$.
17. a^4+4b^4 por $a^2-2ab+2b^2$.
18. $x^3-9x^2+27x-27$ por $x-3$.
19. $6x^3+14x^2-4x+24$ por $2x+6$.
20. a^3-b^3 por $a-b$.
21. $12a^5-14a^4b+10a^3b^2-a^2b^3-8ab^4+4b^5$ por $\left.\begin{matrix}6a^3-4a^2b-3ab^2\\+2b^3.\end{matrix}\right\}$

22. $x^4 - 6xy - 9x^2 - y^2$ por $x^2 + y + 3x$.

23. $y^5 + 1$ por $y + 1$.

24. $y^6 - 1$ por $y - 1$.

25. $x^4 - 81y^4$ por $x - 3y$.

26. $x^6 - 2x^3 + 1$ por $x^2 - 2x + 1$.

27. $x^6 - 1 - 6x^4 - 3x^2$ por $-2x^2 - x + x^3 - 1$.

28. $2a^5 + 53a^2b^3 - 49b^5 - 7a^3b^2 - 9a^4b$ por $2a^2 - 5ab - 7b^2$.

29. $m^4 + n^4$ por $m + n$.

30. $b^4 - 3y^4$ por $b - y$.

31. $x^5y - xy^5$ por $x^3 + y^3 + xy^2 + x^2y$.

32. $x^5 - 6x^2 - x - 6$ por $x^2 + 2x + 3$.

33. $x^4 + x^3 + 57 - 35x - 24x^2$ por $x^2 - 3 + 2x$.

34. $a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2$ por $a + b + c$.

35. $2a^3 + 5ac^2 - 2c^3$ por $2a^3 - 5ac^2 + 2c^3$.

36. $a^4 - 2a^3c + 4a^2c^2 - 8ac^3 + 16c^4$ por $a + 2c$.

37. $32x^5 + 243$ por $2x + 3$.

38. $2x^4 - 11x - 4x^2 - 12 - 3x^3$ por $4 + 2x^2 + x$.

39. $15m^4 + 50m^2 + 15 - 32m - 32m^3$ por $3m^2 + 5 - 4m$.

40. $x^6 - 6x^4 + 5x^2 - 1$ por $x^3 + 2x^2 - x - 1$.

41. $6a^4 + 4a^3x - 9a^2x^2 - 3ax^3 + 2x^4$ por $2a^2 + 2ax - x^2$

42. $2mx + 3nx + 10mn + 15n^2$ por $x + 5n$.

43. $12(a+b)^3 + 3(a+b)^2$ por $3\,(a+b)$.

44. $a^{2n} - b^{2m} + 2b^mc^r - c^{2r}$ por $a^n + b^m - c^r$.

45. $x^{n+1} + x^ny - xy^n - y^{n+1}$ por $x^n - y^n$.

46. $a^4 + b^4$ por $a^2 + ab\sqrt{2} + b^2$.

47. $\frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{3}{4}$ por $\frac{1}{2}x + 1$.

48. $a^{2m} + 2a^m b^n + b^{2n}$ por $a^m + b^n$.

49. $2a^{3n} - 6a^{2n}b^n + 6a^n b^{2n} - 2b^{3n}$ por $a^n - b^n$.

50. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{17}{8}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{9}{4}$ por $\frac{1}{3}x + 3$.

51. $a - b$ por $a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}$.

52. $x^{\frac{3}{2}} - y^{\frac{3}{2}}$ por $x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}$.

53. $x^{\frac{5}{8}} - x^2 - 4x^{\frac{3}{2}} + 6x - 2x^{\frac{1}{2}}$ por $x^{\frac{3}{2}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 2$.

54. $x^3 + 5x + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}$ por $x + \frac{1}{x}$.

55. $x^4 - \frac{1}{x^4}$ por $x - \frac{1}{x}$.

56. $\frac{a^3}{x} - 2x^2 - \frac{3a^2}{2} - \frac{3x^3}{a}$ por $2a - 3x$.

57. $\frac{x^3}{y^3} + \frac{5x^2}{12y^2} + \frac{39}{16}$ por $\frac{x}{3y^2} + \frac{1}{2y}$.

58. $a^{2m} - 3a^m c^n + 2c^{2n}$ por $a^m - c^n$.

VII. DESCOMPOSICIÓN DE LAS CANTIDADES EN SUS FACTORES.

MONOMIOS.

Regla.—Para descomponer un monomio en sus factores, se descompone el coeficiente numérico en sus factores primos por las reglas de Aritmética, y en seguida, se escribe cada literal tantas veces como unidades tenga su exponente.

Descomponer en sus factores primos:

1. $12a^3b^2c$.
2. $24x^3yz^2$.
3. $125c^4x^2$.
4. $27a^4y^3$.
5. $18b^2c^2d^2$.
6. $16e^3c^4$.
7. $36abc^3$.
8. $30c^2e^4f^2$.
9. $a^{2m+1}b^{3n}$.
10. $6a^{m-n}b^{2-m}$.

POLINOMIOS.

CASO I.

Cuando los términos del polinomio tienen un monomio como factor común.

Regla.—Se divide cada término del polinomio por el máximo común divisor de los términos; en seguida se encierra este cociente dentro de un paréntesis, escribiendo el divisor como coeficiente del paréntesis.

Descomponer en sus factores:

1. x^2+2x.
2. $5a^2-15a$.
3. $ax+bx$.
4. x^2+5x.

5. $x + ax$.

6. $6a^3 + 18a^2 - 12a$.

7. $3m^3 - 12m^2$.

8. $am + an + ax$.

9. $4x^3y - 12x^2y^2 + 8xy^3$.

10. $a^2b^3 - a^2c - 2a^2d$.

11. $5x^3 + 10x^2 + 15x$.

12. $6a^5b^3 - 21a^4b^2 + 27a^3b^4$.

13. $84x^2y^3 - 140x^3y^4 + 70x^4y^5$.

14. $12c^4bx^3 - 15c^3x^4 - 6c^2x^3y$.

15. $32a^3b^6 + 96a^6b^8 - 128a^8b^9$.

CASO II.

Cuando el polinomio consta de cuatro términos, de los cuales los dos primeros y los dos últimos tienen como factor común un binomio.

Regla.—Se saca el factor común á los dos primeros términos, y en seguida el factor común á los dos últimos términos, conforme á la regla ya enunciada en el Caso I.

Descomponer en sus factores:

1. $ac - ad - bc + bd$.

2. $am - bm + an - bn$.

3. $ax + ay + bx + by$.

4. $x^2 - ax - bx + ab$.

5. $am - bm - an + bn$.

6. $x^3z^2 + x^2z^3 + x^2z + xz^2$.

7. $x^2 + 2x - xy - 2y$.

8. $ab + ay - by - y^2$.

9. $cdz^2 - cyz + dyz - y^2$.

10. $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$.

11. $abx - aby + pqx - pqy$.

12. $mx^2 - my^2 + nx^2 - ny^2$.

13. $cdx^2 - cxy + dxy - y^2$.

14. $x^3 + x^2 + x + 1$.

15. $bc + bx - cx - x^2$.

16. $8cx - 12cy + 2dx - 3dy$.

17. $3ax + 2bx - 3ay - 2by$.

CASO III.

Descomponer un trinomio en sus factores, cuando ese trinomio es un cuadrado perfecto.

Regla.—Se extraen las raíces cuadradas del primero y último términos, uniéndolas con el signo del segundo término.

Descomponer en sus factores :

1. $x^2+2xy+y^2$.
2. $a^2+2ax+x^2$.
3. $a^2-2ax+x^2$
4. $a^4+2a^2b^2+b^4$.
5. $9a^2+12ab+4b^2$.
6. $4+4m+m^2$.
7. $x^2+12x+36$.
8. $9m^2+12m+4$.
9. y^2+2y+1.
10. $x^2+28x+196$.
11. $x^4+2ax^3+a^2x^2$.
12. x^4+12x^2+36.
13. $x^2+34+289$.
14. $x^2y^2+16xy+64$.
15. $a^4+2a^3+a^2$.
16. z^4+14z^2+49.
17. $4m^2-4m+1$.
18. $x^2-14x+49$.
19. $a^2-8a+16$.
20. $4c^2-4cd+d^2$.
21. $a^2-10a+25$.
22. $x^2-38x+361$.
23. $1-12z+36z^2$.
24. m^2-2m+1.
25. $x^2-40x+400$.
26. $a^2c^2-2ac+1$.
27. n^6-20n^3+100.
28. $49a^2-112ab+64b^2$
29. $x^6-4x^4+4x^2$.
30. $(a-b)^2+2(a-b)+1$.
31. $(x+y)^2-16(x+y)+64$.

CASO IV.

Descomponer un binomio en sus factores, cuando dicho binomio expresa la diferencia entre dos cuadrados perfectos.

Regla.—Se extrae la raíz cuadrada del primer término y del segundo ; la suma de estas raíces será el primer factor del binomio, y su diferencia será el otro factor.

Descomponer en sus factores :

1. $x^2 - y^2$.
2. $a^2 - x^2$.
3. $m^2 - n^2$.
4. $a^2 - 16$.
5. $x^2 - 1$.
6. $y^2 - 4z^2$.
7. $4a^2 - 25$.
8. $4 - a^2$.
9. $25c^2 - 1$.
10. $a^8 - b^8$.
11. $9m^2 - 4$.
12. $9x^2 - 16y^2$.
13. $9a^2c^4x^2 - 1$.
14. $a^2z^2 - a^2y^2$.
15. $a^8 - 1$.
16. $36x^2 - 49y^2$.
17. $25a^2 - b^4$.
18. $x^4 - y^4$.
19. $m^{16} - n^{16}$.
20. $a^2 - 49x^2$.
21. $(a+b)^2 - (c+d)^2$.
22. $64a^2 - 121b^2c^2$.
23. $a^2c^2 - (a-c)^2$.
24. $(a-b)^2 - c^2$.
25. $(2x+m)^2 - (x-m)^2$.
26. $(ax+by)^2 - 1$.
27. $c^{32} - 1$.
28. $m^2 - (+ - y)^2$.
29. $(x-c)^2 - (b-d)^2$.

CASO V.

Cuando la expresión que se va á descomponer es un trinomio de la forma x^2+ax+b.

Regla.—Si el último término es positivo, se buscan dos números cuya suma sea igual al coeficiente del segundo término, y cuyo producto sea igual al último término; á ambos números se da el signo del segundo término, uniendo el primero con la raíz cuadrada del primer término del trinomio para formar el primer factor, y uniendo el segundo número con la misma raíz para formar el segundo factor.

Si el último término es negativo, se buscan dos números cuya diferencia sea igual al coeficiente del segundo término, y cuyo producto sea igual al último término; se da al mayor de estos dos números el signo del segundo término del trinomio, y al otro, el signo contrario; en seguida se une el primer número con la raíz cuadrada del primer término del trinomio para formar el primer factor, y se une el segundo número con la misma raíz para formar el segundo factor.

Descomponer en sus factores:

1. $x^2+8x+15$.
2. $x^2-7x+10$.
3. $x^2+6x-16$.
4. x^2+5x+6.
5. $x^2+11x+24$.
6. $x^2+13x+36$.
7. $n^2+23n+102$.
8. a^2+5a+6.
9. $m^2+16m+63$.
10. $x^2+21x+110$.
11. c^2+9c+8.
12. $b^2+23b+102$.
13. $a^2+22a+105$.
14. x^2-3x+2.
15. $x^2-7x+10$.
16. $a^2-11a+18$.
17. $x^2-29x+190$.
18. $y^2-10y+21$.
19. $b^2-23b+132$.
20. $a^2-15a+44$.
21. $b^2-11b+10$.
22. $x^2-20x+91$.
23. $c^2-18c+32$.
24. $x^2-20x+100$.
25. $y^2-19y+78$.
26. $z^2-43z+460$.
27. y^2+2y-8.
28. x^2+6x-7.
29. x^2+x-6.
30. $x^2+7x-60$.
31. $m^2+2m-80$.
32. $z^2+13z-140$.
33. $y^2+4y-96$.
34. $a^2+13a-300$.

35. $a^2 + a - 132.$

36. $x^2 + x - 42.$

37. $c + 17c - 390.$

38. $m^4 + 26m^2 - 87.$

39. $x^2 - 3x - 28.$

40. $m^2 - 8m - 33.$

41. $y^2 - 7y - 18.$

42. $a^2 - 11a - 26.$

43. $c^{10} - 9c^5 - 10.$

44. $x^2 - 9x - 90.$

45. $a^2b^2 - 3ab - 4.$

46. $x^4 - 19x^2 - 120$

47. $y^2 - 17y - 110.$

48. $z^2 - 11z - 60.$

49. $a^2b^4 - 7ab^2 - 144.$

50. $a^2x^2 - 3ax - 54.$

51. $a^6c^2 - a^3c - 2.$

CASO VI.

Cuando la expresión es la suma ó la diferencia de dos cantidades afectadas de exponentes iguales é impares.

Regla.—Si la expresión es la suma de dos cantidades afectadas de exponentes iguales é impares, se la divide por la suma de las cantidades, y tanto el cociente como el divisor serán los factores buscados.

Si la expresión es la diferencia de dos cantidades afectadas de exponentes iguales é impares, se la divide por la diferencia de las cantidades, y tanto el cociente como el divisor serán los factores buscados.

Descomponer en sus factores :

1. $x^5 + y^5.$

2. $x^5 - y^5.$

3. $x^5 + 1.$

4. $a^3 + b^3.$

5. $a^7 - 1.$

6. $x^7 + y^7.$

7. $1 + 32n^5.$

8. $m^{10} + n^{10}.$

9. $a^5x^5 + b^{10}y^{10}.$

10. $1 - 32n^5.$

11. $m^9 - n^9.$

12. $32 - 243a^5.$

13. $a^9 + b^9$.

14. $243x^5 - y^5$

15. $x^5 - 1$.

16. $x^7 + 128$.

17. $1 - y^6$

18. $x^{2m+1} + y^{2m+1}$.

VIII. MÁXIMO COMÚN DIVISOR.

Regla.—Para encontrar el Máximo Común Divisor de varias cantidades se descomponen en sus factores primos; y en seguida se forma el producto de los factores comúnes.

Encuéntrese el Máximo Común Divisor:

1. $42a^3b^2$, $70a^2bc$ y $98a^4b^3d^2$.
2. $12ab^2c$ y $25b^4c^5$.
3. a^3x^2 y $7a^4x$.
4. $12a^3b^5c^2$ y $8a^2b^3c$.
5. $15cd^2$ y $9c^2d$.
6. $6a^5x^2$, $18a^3xy$ y $24a^2x^3y^2$.
7. $51a^2m^4n$, $85a^2m^3x$, $119a^4m^2y^4$.
8. $18mn^3$, $45m^2n$, $72m^3n^2$.
9. $25ab^3$, $125a^2b$, $70a^4b^3$.
10. $80x^2y^2$, $100xy^4$, $20x^3y$.
11. $a^2-2ab+b^2$, a^2-b^2, a^5-b^5.
12. $x^2+11x+24$, $x^2-2x-15$, x^2+6x+9.
13. x^2-y^2, x^3+y^3.
14. x^2-1, x^3-1, x^2+x-2.
15. $a^2x^2-2a^2x+4a^2$, $a^2x^2+8a^2x-20a^2$, $a^2x^3-8a^2$.
16. x^2+x-6, $2x^2-11x+14$.
17. $a^4+a^3x+a^2x^2+ax^3-4x^4$, $a^4+2a^3x+3a^2x^2+4ax^3-10x^4$.
18. $a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$, $5a^5+5x^5$.
19. $36a^6+9a^3-27a^4-18a^5$, $27a^5b^2-9a^3b^2-18a^4b^2$.
20. $2x^3-3x^2-x+1$, $6x^3-x^2+3x-2$.

IX. MENOR MÚLTIPLO COMÚN.

Regla.—Para encontrar el Menor Múltiplo Común se descomponen las cantidades dadas en sus factores primos, y el producto de las diferentes cantidades que entren como factores, afectada cada una del mayor de los exponentes, será el menor múltiplo común.

¿ Cuál es el menor múltiplo común de las siguientes expresiones ?

1. $6a^3b$ y a^2b^2.
2. $4a^3x$, $6a^2x^2$ y $2ax^2$.
3. $16x^2y$ y $42y^3z$.
4. $18ax^2$, $72ay^2$ y $12xy$.
5. $36xy^2z^3$, $63x^3yz^2$ y $28x^3y^3z$.
6. x^2, $ax+x^2$.
7. x^2-y^2, $xy-y^2$.
8. x^2-1, x^2-x.
9. x^2+x-6, x^2-4x+4, x^3-9x.
10. $a+b$, a^3+b^3.
11. x^2-1, x^2-7x-8.
12. x^2-1, x^2+1, x^4-1.
13. m^2-n^2, m^3-n^3.
14. x^2-x, x^3-1, x^3+1.
15. $x^2-2xy+y^2$, x^3y-xy^3.

16. $a^2-4a+3,\ a^2+a-12,\ a^2-a-20.$

17. $x^3-1,\ x-1,\ x^2+x+1.$

18. $x^2y-xy^2,\ 3x(x-y)^2,\ 4y(x-y)^3.$

19. $x^3-10x^2+21x,\ ax^2+5ax-24a.$

20. $(a-b)(b-c),\ (b-c)(c-a),\ (c-a)(a-b).$

21. $x^2+5x+6,\ x^2+6x+8.$

22. $a^2+a,\ a^4-a^2,\ a^6+a^3.$

23. $x^2-9x-22,\ x^2-13x+22.$

24. $a^2-8ab+7b^2,\ a^3-9a^2b+23ab^2-15b^3.$

X. QUEBRADOS.

SIMPLIFICACIÓN DE QUEBRADOS.

Regla.—Para simplificar un quebrado, se dividen sus dos términos por el máximo común divisor.

Simplifíquense :

1. $\frac{12ax}{18ab}$, $\frac{15b^4xy}{25cx^5y^2}$, $\frac{14a^2x^2y}{21ax^2}$, $\frac{110mx^2y^3}{550m^2xy^5}$.

2. $\frac{116a^5x^2y}{68a^3xy^2}$, $\frac{12a^2x^3}{36a^3x^5}$, $\frac{45a^5c^3x^2}{15a^3c^3x}$.

3. $\frac{51a^3b - 63a^2b^2}{36a^4b^2 - 9ab}$.

4. $\frac{6a^3 - 6ax^2}{3a^4 + 6a^3x + 3a^2x^2}$.

5. $\frac{x^2 - 1}{4x(x+1)}$.

6. $\frac{4a^2 - 4x^2}{3(a+x)}$.

7. $\frac{a - x}{a^2 - x^2}$.

8. $\frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 - 7x + 12}$.

9. $\frac{x^5 - b^2x^3}{x^4 - b^4}$.

10. $\frac{ax + x^2}{ab^2 + b^2x}$.

11. $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 10x + 21}$.

12. $\dfrac{x^2 - 1}{xy + y}$.

13. $\dfrac{2x^3 - 16x - 6}{3x^3 - 24x - 9}$.

14. $\dfrac{a^2 - a - 20}{a^2 + a - 12}$.

15. $\dfrac{cx + cx^2}{acx + abx}$.

16. $\dfrac{n^2 - 2n + 1}{n^2 - 1}$.

17. $\dfrac{(a + b)^2}{a^2 - ab - 2b^2}$.

18. $\dfrac{5a^2 + 5ax}{a^2 - x^2}$.

19. $\dfrac{y^3 - x^3}{x^2 - 2xy + y^2}$.

20. $\dfrac{(x^2 - a^2)x}{x^3 - a^3}$.

21. $\dfrac{5n^2 - 10n + 5}{7n^2 - 7}$.

22. $\dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$.

23. $\dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$.

24. $\dfrac{9x^2y + 9xy^2}{3x^2 + 6xy + 3y^2}$.

REDUCCIÓN DE LOS QUEBRADOS Á ENTEROS.

Regla.—Para reducir un quebrado impropio á la forma de entero, se divide el numerador por el denominador, y si hay resta, se le pone por denominador el del quebrado.

Redúzcanse á enteros:

1. $\frac{ab+x}{b}$.

2. $\frac{10ax+c-b}{2x}$.

3. $\frac{x^2-2x+1}{x+1}$.

4. $\frac{5ay+ab+x}{a}$.

5. $\frac{3a^2-9ac+x-6a}{3a}$.

6. $\frac{2x^2+5}{x-3}$.

7. $\frac{2a^2-2b^2}{a-b}$.

8. $\frac{x^2+12x+18}{x+3}$.

9. $\frac{16(3x^2+1)}{4x-1}$.

10. $\frac{15a^3-2x}{5a^2}$.

11. $\frac{x^3-y^3}{x+y}$.

12. $\frac{2x^2-5x-2}{x-4}$.

13. $\frac{a^2+7ab^2}{3ab}$.

14. $\frac{x^4-y^4}{x-y}$.

15. $\frac{10a^2-17ax+10x^2}{5a-x}$.

16. $\frac{x^2-6c^2d-m}{3cd}$.

17. $\frac{a^3-1}{a-1}$.

18. $\frac{5x^3-x^2+5}{5x^2+4x-1}$.

19. $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^2+2ab+b^2}$.

20. $\frac{x^2+2xy+y^2+x}{x+y}$.

REDUCCIÓN DE LAS EXPRESIONES MIXTAS Á QUEBRADOS.

Regla.—Para reducir una expresión mixta á la forma de quebrado impropio, se multiplica el entero por el denominador del quebrado, al producto se le agrega el numerador, y á la suma se le da por denominador el del quebrado.

Redúzcanse á la forma de quebrado:

1. $2a-x^2+\frac{3ax-4a^2}{a-x}$.

2. $n-\frac{a-b}{c}$.

3. $a-b+\frac{b^2}{c}$.

4. $1-\frac{x-y}{x+y}$.

5. $y-1+\frac{1-y}{1+y}$.

6. $7a-\frac{2-3a+4a^2}{5-6a}$.

7. $5x-\frac{2x-5}{3}$.

8. $a-x+\frac{a^2+x^2}{a-x}$.

9. $x+1+\frac{x+1}{x}$.

10. $3a-9-\frac{3a^2-30}{a+3}$.

11. $3x-\frac{5ax-3}{2a}$.

12. $2a-3b+4c+\frac{2a^2bc+9ab^2c-12abc^2}{3abc}$.

ADICIÓN DE LOS QUEBRADOS.

Regla.—Para sumar quebrados de diferentes denominadores, se reducen primero á uno común; en seguida se suman los numeradores, y á la suma se le da por denominador el denominador común.

Súmense:

1. $\frac{2x-5}{12}+\frac{3x+11}{18}$.

2. $\frac{a}{3b}+\frac{a+m}{2b}$.

3. $\frac{x}{2y}+\frac{c-a}{3y}+\frac{c+a}{4y}$.

4. $\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+5}$.

5. $\frac{3}{5ab^2}+\frac{1}{2ab}$.

6. $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}$.

7. $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}+\frac{1+x^3}{1-x^3}$.

8. $\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-3}$.

9. $\frac{2a+3}{6}+\frac{3a+5}{8}$.

10. $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}$.

11. $\frac{a}{b}+\frac{c}{ab}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b^2}$.

12. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$.

13. $\frac{b-4a}{24a}+\frac{a+5b}{30b}$.

14. $\frac{1}{1+a}+\frac{a}{1-a}+\frac{a}{1+a}$.

15. $\frac{12b-a}{35c}+\frac{3a-b}{7c}$.

16. $\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1-x^2}$.

17. $\frac{m-2}{2mn}+\frac{2-3mn^2}{3m^2n^3}$.

18. $\frac{4a-1}{4ac}+\frac{3-5b^2}{6b^2c}$.

19. $2x+3x+\frac{3a}{5}+x+\frac{2a}{9}$.

20. $\frac{4a^2}{1-a^4}+\frac{1-a^2}{1+a^2}$.

21. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1+\frac{a+b}{ab}$.

22. $\frac{a^2+1}{3a^2}+\frac{6a^3-1}{12a^3}+\frac{b-2}{6b}$.

23. $3mx+\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}+2mx+4$.

24. $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-2}{x-3}+\frac{x-3}{x-4}$.

25. $\frac{a}{b}+\frac{a-3b}{cd}+\frac{a^2b^2-ab}{bcd}$.

26. $\frac{3a+1}{12a}+\frac{2b-1}{8b}+\frac{4c-1}{16c}+\frac{6d+1}{24d}$.

27. $\frac{3}{x-a}+\frac{4a}{(x-a)^2}+\frac{5a^2}{(x-a)^3}$.

SUSTRACCIÓN DE LOS QUEBRADOS.

Regla.—Si el minuendo y el sustraendo tienen denominadores desiguales, se reducen primero á un común denominador; en seguida, se resta el numerador del sustraendo del numerador del minuendo, y á la resta se le da por denominador el denominador común.

Réstese:

1. $\frac{7x}{2}$ de $\frac{2x-1}{3}$.

2. $\frac{x}{1-x}$ de $\frac{x^2}{1-x}$.

3. $\frac{a^2+1}{3a}$ de $-\frac{6a^3+1}{12a^3}$.

4. $\frac{x+y}{x-y}$ de $\frac{x-y}{x+y}$.

5. $\frac{2ax}{3}$ de $\frac{5ax}{2}$.

6. $\frac{3}{5ab}$ de $\frac{1}{2ab}$.

7. $\frac{1-x}{1+x}$ de $\frac{1+x}{1-x}$.

8. $\frac{1}{1-x}$ de $\frac{2}{1-x^2}$.

9. $\frac{2a+b}{5c}$ de $\frac{3a-b}{7c}$.

10. $\frac{m+2}{7}$ de $-\frac{m+2}{14}$.

11. $3x$ de $\frac{3a+12x}{5}$.

12. $\frac{1}{x+7}$ de $\frac{1}{x+8}$.

13. $\frac{a-b}{2c}$ de $\frac{2b-4a}{5d}$.

14. $\frac{1+x}{1+x+x^2}$ de $\frac{1-x}{1-x+x^2}$.

15. $\frac{3}{a-b}$ de $\frac{2b+a}{a^2+b^2}$.

16. $\frac{3x+2}{a}$ de $\frac{7ax-10a}{a^2}$.

17. $\dfrac{a+c}{(a-b)(x-a)}$ de $\dfrac{b+c}{(a-b)(x-b)}$.

18. $\dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$ de $\dfrac{a-b}{a+b}$.

19. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}$ de $\dfrac{3}{(x+1)(x+2)}$.

20. $\dfrac{1}{ab-cd}+\dfrac{1}{ab+cd}$ de $\dfrac{2cd}{a^2b^2-c^2d^2}$.

21. $\dfrac{3}{1-2x}+\dfrac{7}{1+2x}$ de $\dfrac{4-20x}{4x^2-1}$.

22. $\dfrac{3x}{(x+y)^2}+\dfrac{x+2y}{x^2-y^2}$ de $\dfrac{3y}{(x-y)^2}$.

23. $\dfrac{2x-6}{x^2+3x+2}$ de $\dfrac{x+2}{x^2-2x-3}+\dfrac{x+1}{x^2-x-6}$.

MULTIPLICACIÓN DE LOS QUEBRADOS.

Multiplicar un quebrado por un entero.

Regla.—Se multiplica el numerador del quebrado por el entero, y el producto se divide por el denominador; ó, se divide el entero por el denominador del quebrado y el cociente se multiplica por el numerador.

Multiplíquese :

1. $\dfrac{5a^2bc}{12mn^2}$ por $3mn$.

2. $\dfrac{mz}{c^2d}$ por cd.

3. $\dfrac{2mx}{3a^2b^2}$ por $3a$.

4. $\frac{3abx^2}{5ay^2}$ por $10y^2a$.

5. $\frac{a-x}{x-1}$ por $a+x$.

6. $\frac{m-n}{3xy}$ por $m+n$.

7. $\frac{ac}{b(x-y)}$ por $x-y$.

8. $\frac{m}{x^3-x}$ por x^2-1.

9. $\frac{3}{a-x}$ por a^2-x^2.

10. $\frac{cd}{m^2-y^2}$ por $m-y$.

11. $\frac{6ax^2}{a^2-y^2}$ por $2a+2y$.

12. $\frac{a+b}{a-b}$ por $a^2-2ab+b^2$.

MULTIPLICAR UN ENTERO POR UN QUEBRADO.

Regla.—Se multiplica el entero por el numerador del quebrado, y el producto se divide por el denominador; ó, se divide el entero por el denominador del quebrado y el cociente se multiplica por el numerador.

Multiplíquese :

1. $x+y$ por $\frac{(a-b)^2}{x^3-y^3}$.

2. x^2-1 por $\frac{3c}{x-1}$.

3. $2ax(x-y)$ por $\frac{3ax}{x-1}$.

4. $3b^4x^3$ por $\frac{10a^3y}{9bx^2}$.

5. x^2-9 por $\frac{x^2-2x}{x^2-2x-3}$.

6. $(c-d)^2$ por $\frac{a+b}{c-d}$.

MULTIPLICAR UN QUEBRADO POR OTRO.

Regla.—Se multiplica numerador por numerador, y denominador por denominador.

Multiplíquese:

1. $\frac{3a}{2b}$ por $\frac{6c}{5a}$ por $\frac{5b}{8c}$.

2. $\frac{3a}{4x}$ por $\frac{5x}{8}$.

3. $\frac{2x}{a}$ por $\frac{3ab}{c}$ por $\frac{3ac}{2b}$.

4. $\frac{8x^2}{9y^3}$ por $\frac{15y^2}{16z^3}$ por $\frac{3z^4}{10x^3}$.

5. $\frac{x}{a}$ por $\frac{x+a}{a+c}$.

6. $\frac{a+m}{c^2}$ por $\frac{cx}{z}$.

7. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ por $\frac{a+b}{a-b}$.

8. $\frac{2x^2-x}{5}$ por $\frac{10}{2x^2-4x}$.

9. $\frac{a-b}{5}$ por $\frac{25x-25}{a^2-b^2}$ por $\frac{1}{x-1}$.

10. $\frac{a-b}{a^2+ab}$ por $\frac{a^2-b^2}{a^2-ab}$.

11. $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a+b}$ por $\dfrac{b}{ax-bx}$.

12. $\dfrac{3x^2-5x}{14}$ por $\dfrac{7a}{2x^3-3x}$.

13. $\dfrac{x^2-16}{x^2+5x}$ por $\dfrac{x^2-25}{x^2-4x}$.

14. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-7x}$ por $\dfrac{x^2-13x+42}{x^2+2x}$.

15. $\dfrac{x^2+xy}{x-y}$ por $\dfrac{(x-y)^2}{x^4-y^4}$.

16. $\dfrac{a^2-b^2}{a^4-b^2}$ por $\dfrac{a^2-b}{a-b}$.

17. $\dfrac{2x+3y}{2a}$ por $\dfrac{2a}{5x}$.

18. $\dfrac{x^2y-4y}{(x-y)^2-z^2}$ por $\dfrac{x^2-xy-xz}{xy+2y}$.

19. $\dfrac{a+x}{30}$ por $\dfrac{5a}{3(a+x)}$.

20. $b+\dfrac{bx}{a}$ por $\dfrac{a}{x}$.

21. $a-\dfrac{x^2}{a}$ por $\dfrac{a}{x}+\dfrac{x}{a}$.

22. $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-xy+y^2}$ por $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}$

23. $\dfrac{a^2-4a+3}{a^2-5a+4}$ por $\dfrac{a^2-9a+20}{a^2-10a+21}$ por $\dfrac{a^2-7a}{a^2-5a}$.

24. x^2-x+1 por $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1$.

25. $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2}$ por $\dfrac{a^2-(b+c)^2}{(a-c)^2-b^2}$.

26. $\frac{(x+y)^5}{(a+b)^4}$ por $\frac{(a+b)^5}{(x+y)^6}$.

27. $\frac{x^2-y^2}{x^2-3xy+2y^2}$ por $\frac{xy-2y^2}{x^2+xy}$ por $\frac{x^2-xy}{(x-y)^2}$.

28. $1-\frac{x-y}{x+y}$ por $2+\frac{2y}{x-y}$.

29. $\frac{(a-x)^3}{2a}$ por $\frac{3ab}{a-x}$ por $\frac{2c}{(a-x)^2}$.

30. $\frac{x^2-1}{1+y}$ por $\frac{1-y^2}{x^2+x}$ por $1+\frac{x}{1+x}$.

DIVISIÓN DE LOS QUEBRADOS.

Dividir un quebrado por un entero.

Regla.—Se multiplica el denominador del quebrado por el entero, y al producto se le da por numerador el del quebrado.

Divídase:

1. $\frac{3a^2x}{cd}$ por $3ax$.

2. $\frac{6a^2b}{5x^3y^4}$ por $9a^2b^3$.

3. $\frac{2y^2}{x^3+y^3}$ por $2y$.

4. $\frac{3x^2y}{(x+y)^2}$ por $3y$.

5. $\frac{a-x}{mz}$ por $2m$.

6. $\frac{m}{a^2-4}$ por a^2+4.

7. $\frac{a^2-1}{cd}$ por $a+1$.

8. $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$ por $a+b$.

9. $\frac{c^2-d^2}{c}$ por $c+d$.

10. $\frac{x^2+2xy+y^2}{y^2}$ por $x+y$.

DIVIDIR UN ENTERO POR UN QUEBRADO.

Regla.—Se multiplica el entero por el denominador del quebrado, y en seguida se divide el producto por el numerador.

Divídase:

1. $x+2$ por $\frac{x^2+5x+6}{2x}$.

2. a^2-b^2 por $\frac{5(a-b)^2}{a^2+b^2}$.

3. $9a+9b$ por $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{3a+3b}$.

4. x^2+4x+3 por $\frac{x+1}{x+3}$.

5. $12c^2a$ por $\frac{9c^4a^3}{5d^2e}$.

6. $4(a^2-b^2)^2$ por $\frac{(a-b)^2}{a^2+2ab+b^2}$.

7. $x^2+8xz+16z^2$ por $\frac{x^2+7xz+12z^2}{x+z}$.

PARA DIVIDIR UN QUEBRADO POR OTRO.

Regla.—Se invierten los términos del quebrado divisor, y en seguida se multiplican numerador por numerador, y denominador por denominador.

Divídase:

1. $\dfrac{6a^2b}{5x^3y^4}$ por $\dfrac{9a^2b^3}{10x^2y^5}$.

2. $\dfrac{1}{a^2+a-12}$ por $\dfrac{1}{a^2+3a-18}$.

3. $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{ab}$ por $\dfrac{x-y}{bc}$.

4. $\dfrac{x^3-25x}{x^2+x-6}$ por $\dfrac{x^2-5x}{x^2-x-12}$.

5. $x^4-\dfrac{1}{x^4}$ por $x-\dfrac{1}{x}$.

6. $\dfrac{m^2-n^2}{3}$ por $\dfrac{m+n}{6}$.

7. $\dfrac{4a(a^2-x^2)}{3b(c^2-x^2)}$ por $\dfrac{a^2-ax}{bc+bx}$.

8. $\dfrac{a+1}{a^2-3a}$ por $\dfrac{a^2-a-2}{a^2-a-6}$.

9. $\dfrac{ab-b^2}{a^2+2ab+b^2}$ por $\dfrac{b^2}{a^2-b^2}$.

10. $\dfrac{x^4-b^4}{x^2-2bx+b^2}$ por $\dfrac{x^2+bx}{x-b}$.

11. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{ab^3}$ por $b+\dfrac{1}{b}-1$.

12. $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{x}{1-x}$ por $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{x}{1+x}$.

13. $\dfrac{2}{3y^2}-\dfrac{2}{xy}+\dfrac{3}{2x^2}$ por $\dfrac{2}{3y^2}-\dfrac{3}{2x^2}$.

14. $1+\dfrac{1}{a}$ por $1-\dfrac{1}{a^2}$.

ELEVACIÓN Á POTENCIAS.

ELEVACIÓN DE LOS MONOMIOS Á UNA POTENCIA CUALQUIERA.

Regla.—Para elevar un monomio á una potencia, se eleva á ésta su coeficiente por las reglas de la aritmética; se multiplican los exponentes de las literales por el exponente de la potencia, y el resultado se afecta del signo *más* cuando el grado de la potencia sea par, y cuando sea impar se le pone el signo del monomio.

Elévense á la potencia indicada las siguientes expresiones:

1. $(a^3)^2$, $(-2a^n)^5$, $(-ab^2c^3)^4$, $(2a^2bc^3)^4$, $(3m^mb^c)^5$.

2. $(x^2y^3)^2$, $(-c^{-2m}d^m)^5$, $(4a^2b^3c^4)^3$, $(-5a^2bx^3)^5$.

3. $-a^{-2})^4$, $(-7m^3nx^2y^4)^2$, $(2mn^2x^3)^6$, $(3a^{-2}b^2)^4$.

4. $\left(-\frac{a^3b^2}{2}\right)^4$, $\left(\frac{ac^2}{b^2}\right)^4$, $\left(-\frac{2y}{5x}\right)^4$, $\left(\frac{3a^2b^3}{4xy^4}\right)^3$, $\left(\frac{3x^2y}{2b^3b^2}\right)^3$.

5. $\left(\frac{a^{-m}b^2}{x^my^n}\right)^5$, $\left(-\frac{bcx^m}{4a^2}\right)^5$, $\left(\frac{2a^2xy}{bc^2y}\right)^3$, $\left(\frac{4a^{-2}c^4}{3}\right)^3$.

ELEVACIÓN DE LOS POLINOMIOS Á UNA POTENCIA CUALQUIERA.

Regla.—Para elevar un polinomio á una potencia, se usa la Fórmula de Newton.

Elévense á la potencia indicada las siguientes expresiones:

1. $(x+y)^3$.
2. $(a+b)^6$.
3. $(x+2)^3$.
4. $(y+z)^7$.

5. $(a+2)^5$.

6. $(a+1)^7$.

7. $(x-y)^6$.

8. $(x-1)^5$.

9. $(2x-a)^4$.

10. $(a-b)^5$.

11. $(1-a)^5$.

12. $(ab-3)^7$.

13. $(ab+cxy)^3$.

14. $(a^2+bc)^7$.

15. $(a-b)^{\frac{2}{3}}$.

16. $(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}$.

17. $(3-y^2)^{\frac{1}{2}}$.

18. $(2m^2-3n^{\frac{1}{2}})^{-\frac{4}{}}$.

EXTRACCIÓN DE RAÍCES.

EXTRACCIÓN DE RAÍCES DE MONOMIOS.

Regla.—Para extraer la raíz de un monomio, se extrae la raíz de su coeficiente, y se dividen los exponentes de las literales por el índice de la raíz, poniendo el signo $\pm$ al resultado cuando el monomio es positivo y el índice del radical es par; ó el signo del monomio cuando el índice del radical es impar.

Extráigase la raíz indicada de las siguientes expresiones:

1. $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt{9a^4b^2c^6}$, $(25x^8y^6)^{\frac{1}{2}}$, $(25a^2b^4c^2)^{\frac{1}{2}}$.

2. $\sqrt[5]{-32a^{10}x^{5m}}$, $\sqrt[3]{-1728c^6d^{12}x^3y^9}$, $\sqrt{49a^4b^2c^{12}}$.

3. $\sqrt[4]{16a^4b^8}$, $\sqrt[5]{a^2y^3}$, $\sqrt[3]{3375b^{21}c^{15}}$, $\sqrt[6]{64a^{18}b^{24}c^6}$.

4. $\sqrt[3]{125a^6m^2}$, $\sqrt{25a^2b^4c^2}$.

5. $\sqrt[6]{\frac{64x^{18}}{729z^{30}}}$, $\sqrt[3]{\frac{64a^8}{81x^2}}$, $\sqrt[3]{\frac{8a^3b^9}{27c^6}}$, $\sqrt[3]{-\frac{64m^3n^6}{125}}$.

EXTRACCIÓN DE RAÍCES DE POLINOMIOS.—RAÍZ CUADRADA.

Regla.—Para extraer la raíz cuadrada de un polinomio:

1° Se ordena con respecto á las potencias decrecientes de una misma literal.

2° Se busca la raíz cuadrada del primer término, se

forma su cuadrado y se resta del polinomio, quedando como resta todos los términos del polinomio menos el primero.

3° Se duplica la raíz hallada, se divide el primer término de la resta por el duplo de la raíz, y el cociente, que es el segundo término de la raíz, se pone al lado de ésta y del duplo del primero de la raíz.

4° Se multiplica el segundo término de la raíz por la suma del duplo del primero con el segundo, y el producto se resta de la primera resta.

Y así se continúa la operación hasta encontrar cero por resta, ó hasta que el primer término de la resta, después de haberse ordenado, no sea divisible por el primer término del duplo de la raíz hallada.

Extráigase la raíz cuadrada de los siguientes polinomios :

1. $16a^4 - 24a^3x + 49a^2x^2 - 30ax^3 + 25x^4.$

2. $9x^4 - 30a^3x^2 + 25a^6.$

3. $25x^2 - 20x^3y + 4x^4y^2.$

4. $8x^2 + 4x^3 + x^4 + 4 + 8x.$

5. $4a^6 - 12a^5x + 5a^4x^2 + 6a^3x^3 + a^2x^4.$

6. $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc.$

7. $x^6 - 6ax^5 + 15a^2x^4 - 20a^3x^3 + 15a^4x^2 - 6a^5x + a^6.$

8. $9a^2 - 6ab + 30ac + 6ad + b^2 - 10bc - 2bd + 25c^2 + 10cd + d^2.$

9. $16c^6 - 40c^4 - 24c^3 + 25c^2 + 30c + 9$

10. $x^4 - x^3 + \frac{x^2}{4} + 4x - 2 + \frac{4}{x^2}.$

RAÍZ CÚBICA.

Regla.—Para extraer la raíz cúbica de un polinomio:

1° Se ordena con respecto á las potencias decrecientes de una misma literal.

2° Se busca la raíz cúbica del primer término, se forma su cubo y se resta del polinomio, quedando como resta todos los términos del polinomio menos el primero.

3° Se triplica el cuadrado de la raíz hallada, se divide el primer término de la resta por el triple del cuadrado de la raíz, y el cociente será el segundo término de la raíz.

4° Se completa el divisor añadiendo á éste triple del cuadrado de la raíz, tres veces el producto del último término de la raíz por la parte de la raíz previamente hallada, y también el cuadrado del último término hallado.

5° Se multiplica esta suma por el último término de la raíz, y el producto se sustrae de la primera resta.

Y así se continúa la operación hasta encontrar cero como resta, ó hasta que el primer término de la resta, despúes de ordenarlo, no sea divisible por el primer término del triple del cuadrado de la raíz hallada.

Extráigase la raíz cúbica de los siguientes polinomios:

1. $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

2. $y^6-1+5y^3-3y^5-3y.$

3. $1-6y+12y^2-8y^3.$

4. $66x^4+1-63x^3-9x+8x^6-36x^5+33x^2.$

RAÍZ CUARTA.

Regla.—Se extrae la raíz cuadrada de la raíz cuadrada.

Extráigase la raíz cuarta de los siguientes polinomios :

1. $16a^4 - 96a^3.x + 216a^2.x^2 - 216a.x^3 + 81.x^4.$

2. $x^8 - 4.x^7 + 10.x^6 - 16.x^5 + 19.x^4 - 16.x^3 + 10.x^2 - 4.x + 1.$

3. $x^8 - 8.x^7 + 16.x^6 + 16.x^5 - 56x^4 - 32.x^3 + 64.x^2 + 64.x + 16.$

4. $81a^4 - 540a^3b + 1350a^2b^2 - 1500ab^3 + 625b^4.$

RADICALES.

REDUCCIÓN DE LOS RADICALES.

CASO I.

Cuando la cantidad que está dentro del radical es una potencia perfecta del grado indicado por uno de los factores del índice.

Regla.—Se extrae la raíz de la cantitad que corresponde á uno de los factores del índice, y se escribe esta raíz dentro de un radical que tenga por índice el otro factor del índice dado.

Redúzcanse los radicales siguientes:

1. $\sqrt[6]{8}$.
2. $\sqrt{5a^2b^3}$.
3. $\sqrt[10]{32a^5}$.
4. $\sqrt[6]{27a^3b^9}$.
5. $\sqrt[9]{8}$.
6. $\sqrt[6]{-64a^3}$.
7. $\sqrt[12]{64}$.
8. $\sqrt[8]{256a^{12}x^8}$.
9. $\sqrt[6]{125a^3b^9}$.
10. $\sqrt[4]{81n^2m^4}$.

11. $\sqrt[8]{25x^4}$.

12. $\sqrt[4]{x^2-2xy+y^2}$.

13. $\sqrt[12]{27}$.

CASO II.

Cuando la cantidad que está dentro del radical tiene un factor que es una potencia perfecta del mismo grado que el del radical.

Regla.—Se descompone la cantidad que está dentro del signo en dos factores, uno de los cuales sea la mayor potencia perfecta del mismo grado que el del radical. Se extrae la raíz indicada de este factor, y se escribe el resultado como coeficiente del radical, dentro del cual se escribe el otro factor.

Redúzcanse los radicales siguientes:

1. $\sqrt[3]{81x^4y^3}$; $\sqrt[6]{27a^3b^9}$; $\sqrt[5]{7x^2y^7}$; $7\sqrt{63a^4b^5c^6}$.

2. $\sqrt[8]{256a^{12}x^8}$; $\sqrt{8a^3b}$; $\sqrt{98a^3b^2}$; $\sqrt[4]{81n^2m^4}$.

3. $\sqrt[3]{108m^9n^{10}}$; $\sqrt[3]{250x^2y^2z^7}$; $\sqrt[6]{-64a^3}$.

4. $\sqrt{a^4-3a^3b+3a^2b^2-ab^3}$; $\sqrt{25x^3y^4-50x^4y^3}$.

5. $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$; $\sqrt{50a^2-100ab+50b^2}$; $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

6. $\sqrt{\frac{5}{9}}$; $\sqrt[4]{\frac{4}{25}}$; $\sqrt[3]{\frac{3x}{4}}$; $\sqrt{\frac{4}{5}}$; $\sqrt{\frac{ab^2}{4(a+x)}}$; $\sqrt{\frac{9a^2b^3}{10cd}}$.

7. $\frac{11}{\sqrt{5}}$; $\frac{a}{a^2-b^2}\sqrt{\frac{a^3c-2a^2bc+ab^2c}{b^3}}$.

CASO III.

Para poner una cantidad dentro de un radical.

Regla.—Se eleva la cantidad á la potencia indicada por el índice del radical.

Pónganse dentro del signo radical las cantidades siguientes:

1. $3a^2\sqrt{2ax}$; $3\sqrt{5}$; $(a-x)\sqrt{a+x}$; $4\sqrt{5ab}$.

2. $\frac{1}{2}\sqrt{4a}$; $5a\sqrt[3]{2x^2}$; $(x-y)\sqrt{x-y}$; $a^2b\sqrt[3]{ab^2}$.

3. $\frac{c^2}{3}\sqrt[3]{27a^2}$; $3mn^3\sqrt[4]{\frac{mn^2}{27}}$; $\frac{3}{2x}\sqrt[3]{\frac{9}{4x^2}}$.

4. $(x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; $\frac{1}{2}\sqrt[4]{x^2}$; $5x\sqrt[m]{25x^{-2}}$.

5. $\frac{1+a}{1-a}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$; $(1+x)\sqrt{\frac{2}{1+x}-1}$; $\frac{2x^2-1}{x}\sqrt{\frac{1}{(2x^2-1)^2}-1}$.

6. $6a^2\sqrt{a+2b}$; $\frac{1}{3}\sqrt{6}$; $\frac{1}{4}\sqrt{2}$; $24\sqrt{\frac{1}{12}}$.

CASO IV.

Para hacer racional el denominador de un quebrado, cuando dicho denominador es un monomio.

Regla.—Se representa el radical por un exponente fraccionario; en seguida, se multiplican los dos términos del quebrado por la cantidad que está como denominador, afectada de un exponente tal que sumado con el exponente del denominador dado produzca un entero.

Háganse racionales los denominadores de los quebrados siguientes :

1. $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

2. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

4. $\frac{3a\sqrt{2x}}{\sqrt{3x}}$

5. $\frac{2x}{\sqrt{5xy}}$.

6. $\frac{2}{3\sqrt{a^3}}$.

7. $\frac{5}{\sqrt[3]{9a^2}}$.

8. $\frac{6}{\sqrt[5]{64}}$.

9. $\frac{2c}{\sqrt[4]{27a^2}}$.

10. $\frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}$.

11. $\frac{3a}{2\sqrt[3]{3c-x^2}}$.

CASO V.

Para hacer racional el denominador de un quebrado, cuando dicho denominador es un binomio, y solo contiene radicales del segundo grado.

Regla.—Se multiplican los dos términos del quebrado por el denominador, teniendo el segundo término signo contrario.

Háganse racionales los denominadores de los quebrados siguientes:

1. $\dfrac{4}{3+\sqrt{2}}$.

2. $\dfrac{a}{a-\sqrt{b}}$.

3. $\dfrac{4-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$.

4. $\dfrac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$.

5. $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

6. $\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$.

7. $\dfrac{7+2\sqrt{10}}{7-2\sqrt{10}}$.

8. $\dfrac{3}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$.

9. $\dfrac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}$.

10. $\dfrac{2x-\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}-2y}$.

11. $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$.

12. $\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}.$

13. $\dfrac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x-2a}+\sqrt{x+2a}}.$

14. $\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x-1}}.$

15. $\dfrac{\sqrt{7x^2+4}+2\sqrt{3x-1}}{\sqrt{7x^2+4}-2\sqrt{3x-1}}.$

CASO VI.

Para reducir varias expresiones radicales al mismo grado.

Regla.—Se representan las cantidades radicales por medio de exponentes fraccionarios. Se reducen los exponentes á un común denominador, y en seguida se ejecutan las operaciones indicadas por el numerador y el denominador de los exponentes fraccionarios que resulten.

Redúzcanse al mismo índice los radicales siguientes:

1. $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt{3}$.

2. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[4]{2}$.

3. $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$ y $\sqrt[3]{3}$.

4. $\sqrt[3]{2a}$, $\sqrt[5]{3x}$ y $\sqrt{xy}$.

5. $\sqrt[3]{2a}$, $\sqrt[5]{3b}$ y $\sqrt[5]{4c}$.

6. $\sqrt{ax}$ y $\sqrt[3]{bx^2}$.

7. $\sqrt[6]{xy}$, $\sqrt[4]{yz}$ y $\sqrt[8]{xz}$.

8. $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[6]{5b}$ y $\sqrt[8]{3c}$.

9. $\sqrt[m]{x}$ y $\sqrt[n]{y}$.

10. $\sqrt[6]{a+b}$ y $\sqrt[4]{a-b}$.

11. $2c\sqrt{x}$ y $5a\sqrt[3]{2y}$.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE RADICALES.

Regla.—Para sumar ó restar las expresiones radicales cuando éstas son semejantes, se suman ó restan los coeficientes; cuando los radicales no son semejantes, se hacen semejantes, y se suman ó restan los coeficientes; cuando no se pueden hacer semejantes, solo se indican las operaciones.

Ejecútense las operaciones indicadas:

1. $\sqrt{27}+\sqrt{12}$.

2. $\sqrt{27}+2\sqrt{48}+3\sqrt{108}$.

3. $\sqrt{18}+\sqrt{242}$.

4. $\sqrt{96}+\sqrt{54}$.

5. $7\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{432}$.

6. $\sqrt{243xy^2}+\sqrt{192xy^2}$.

7. $\sqrt{27ab^2}+\sqrt{75a^3}+(a+3b)\sqrt{3a}$.

8. $12\sqrt{72}-3\sqrt{128}$.

9. $c\sqrt[5]{a^6b^7c^3} - a\sqrt[5]{ab^7c^8} + b\sqrt[5]{a^6b^2c^8}.$

10. $\sqrt[3]{24} + 5\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{250}.$

11. $3\sqrt{\frac{2}{5}} - 2\sqrt{\frac{1}{10}}.$

12. $3\sqrt{\frac{2}{5}} + 2\sqrt{\frac{1}{20}}.$

13. $\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{1}{3}}.$

14. $8\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{60} - \frac{11}{5}\sqrt{15}.$

15. $\sqrt[3]{\frac{27a^4x^4}{2b}} + \sqrt[3]{\frac{ax^4}{54b}}.$

16. $\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{32}} + \sqrt{\frac{2}{3}}.$

17. $\sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{1}{6}} + \sqrt{\frac{2}{27}}.$

18. $\sqrt{\frac{16}{15}} - \sqrt{\frac{3}{5}}.$

19. $(a-x)\sqrt{a^2-x^2} - (a-x)\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$

20. $x\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} + y\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} + \frac{3y^2-x^2}{x^2-y^2}\sqrt{x^2-y^2}.$

MULTIPLICACIÓN DE RADICALES.

Regla.—Para multiplicar dos expresiones radicales, se reducen previamente al mismo índice, y en seguida se multiplican las cantidades que están fuera y las que están dentro del signo radical.

Multiplíquese :

1. $3\sqrt{2}$ por $4\sqrt{6}$; $\frac{2}{7}\sqrt{10}$ por $\frac{7}{10}\sqrt{15}$.

2. $2a\sqrt{3x}$ por $4\sqrt{y}$; $5\sqrt{ac}$ por $\sqrt{am}$; $\sqrt[5]{3}$ por $\sqrt[3]{3}$.

3. $\sqrt{2}$ por $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{6}$ por $\sqrt{15}$; $\sqrt{6}$ por $\sqrt{42}$.

4. $2\sqrt{5}$ por $3\sqrt{15}$; $3\sqrt{2}$ por $4\sqrt{8}$; $3\sqrt{3}$ por $2\sqrt{3}$.

5. $\sqrt{2a}$ por $\sqrt[3]{3a^2}$; $5\sqrt{10}$ por $3\sqrt{15}$; $\sqrt{6}$ por $\sqrt{150}$.

6. $2\sqrt[3]{9x^2}$ por $\sqrt[3]{3xyz}$; $5\sqrt{\frac{2}{7}}$ por $\frac{3}{7}\sqrt{162}$; $\sqrt[4]{2ac}$ por $\sqrt[3]{2ac}$.

7. $(a+\sqrt{b})$ por $\sqrt{b}$; $\sqrt{a-x}$ por $\sqrt[3]{a-x}$; $4\sqrt[5]{3}$ por $3\sqrt{2}$.

8. $x+\sqrt{y}$ por $x-\sqrt{y}$; $\frac{3}{4}\sqrt{12}$ por $\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$.

9. $\sqrt{a}+\sqrt{c}$ por $\sqrt{a}+\sqrt{c}$; $\sqrt{\frac{a}{b}}$ por $\sqrt{\frac{a^3}{x}}$.

10. $\sqrt{\frac{3}{5}}$ por $\sqrt{\frac{5}{27}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$ por $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{x}-2$ por $3+\sqrt{x}$.

11. $3\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ por $6\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{2}{5}}$ por $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ por $\frac{1}{3}\sqrt[4]{10}$.

12. $2\sqrt{a}-3\sqrt{b}$ por $3\sqrt{a}+2\sqrt{b}$; $2\sqrt{a}-3\sqrt{b}$ por $4\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

13. $3\sqrt{x^2+1}+4x$ por $2\sqrt{x^2+1}-x$.

14. $a^2-a\sqrt{2}+1$ por $a^2+a\sqrt{2}+1$; $\sqrt{a}+c\sqrt[3]{b}$ por $\sqrt{a}-c\sqrt[3]{b}$.

15. $\sqrt[3]{12+\sqrt{19}}$ por $\sqrt[3]{12-\sqrt{19}}$; $11\sqrt{2}-4\sqrt{15}$ por $\sqrt{6}+\sqrt{5}$.

DIVISIÓN DE RADICALES.

Regla.—Para dividir una expresión radical por otra, se reducen previamente al mismo índice, y en seguida se dividen las cantidades que están fuera y las que están dentro del signo radical.

Divídase:

1. $4\sqrt{abc}$ por $2\sqrt{ac}$; $\sqrt[3]{15}$ por $\sqrt{5}$; $\sqrt{108}$ por $\sqrt{6}$.

2. $\sqrt{3a^2y^3}$ por $\sqrt[3]{2ay}$; $\sqrt{125a^3xy}$ por $\sqrt{5a^3x}$.

3. $\sqrt{50c^3}$ por $\sqrt{2c}$; $\sqrt[3]{9a^4}$ por $\sqrt[3]{3a}$; $\sqrt{6}$ por $\sqrt[3]{3}$.

4. $8\sqrt{72}$ por $2\sqrt{6}$; $\sqrt{3}$ por $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{3a^2b}$ por $\sqrt[5]{6a^3b^2}$.

5. $3\sqrt{10}$ por $\sqrt{15}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$ por $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$; $\sqrt{\frac{x}{y}}$ por $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

6. $\sqrt[3]{2a^2x^3}$ por $\sqrt[5]{2a^2x^3}$; $\sqrt{a^2-b^2}$ por $\sqrt{a-b}$.

7. $\sqrt[6]{72}$ por $\sqrt{2}$; $(2\sqrt[3]{4}\times5\sqrt[3]{32})$ por $\sqrt[3]{108}$.

8. $20\sqrt[6]{200}$ por $4\sqrt[2]{2}$; $\sqrt{a^3-a^4b}$ por $\sqrt{a}$.

9. $a\sqrt{x}-\sqrt{bx}+a\sqrt{y}-\sqrt{by}$ por $\sqrt{x}+\sqrt{y}$.

10. $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$ por $\sqrt[4]{\frac{y}{x}}$; $\left(\frac{\sqrt{10}}{3\sqrt{27}}+\frac{7\sqrt{48}}{5\sqrt{14}}\right)$ por $\frac{4\sqrt{15}}{15\sqrt{21}}$; $\sqrt{\frac{2}{5}}$ por $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$.

11. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$ por $\left(\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$; $\frac{\sqrt{ax^3}}{\sqrt[3]{ax}}$ por $\frac{\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt{x}}$.

12. $\left(\frac{2}{5}\sqrt{3}+\frac{4}{9}\sqrt{\ }\right)$ por $\frac{6}{7}\sqrt{2}$; $\sqrt{a^2-x^2}$ por $a-x$

13. $m\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ por $n\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

14. $a+b-c+2\sqrt{ab}$ por $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$.

15. $b\sqrt{a^2-b^2}$ por $a\sqrt{(a+b)^2}$.

ELEVACIÓN DE RADICALES Á UNA POTENCIA.

Regla.—Para elevar un radical á una potencia, se eleva á ésta potencia el coeficiente del radical, y también la cantidad que está dentro del signo radical, escribiendo ésta dentro del signo dado.

Elévense á la potencia indicada :

1. $\left(3\sqrt[6]{3}\right)^2$; $\left(2\sqrt[6]{3a^4b}\right)^3$

2. $\left(2\sqrt{x-y}\right)^4$.

3. $\left(\sqrt[5]{5}\right)^3$; $\left(\sqrt[6]{18}\right)^3$.

4. $\left(\sqrt[9]{8}\right)^4$; $\left(\sqrt[9]{27}\right)^4$; $\left(\sqrt[8]{64}\right)^3$; $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2$.

5. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4x^2y}\right)^5$; $\left(2\sqrt[3]{3a^2b}\right)^2$.

6. $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^5$; $\left(\sqrt[3]{m^2}+\sqrt{x^3}\right)^3$; $\left(\sqrt{a}-2\sqrt{b}\right)^5$.

7. $\left(3\sqrt[6]{24a^4b^5}\right)^2$; $\left(4\sqrt{3x}\right)^3$; $\left(3a\sqrt[3]{bx}\right)^4$.

EXTRACCIÓN DE RAÍCES DE RADICALES.

Regla.—Para extraer la raíz de un monomio afectado de un radical: Se extrae la raíz del coeficiente, y también de la cantidad que está dentro del signo, y afectando ésta del signo dado, se reduce el resultado á la forma más simple.

Extráigase la raíz indicada

1. $\sqrt[3]{4\sqrt{3a^3x}}.$

2. $\sqrt{(\sqrt{2})}.$

3. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}}.$

4. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a+b}}.$

5. $\sqrt[5]{486a\sqrt[3]{4a}}$

6. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{512}}.$

7. $\sqrt{\sqrt[3]{x^2-2x+1}}.$

Regla.—Para extraer la raíz cuadrada de un binomio, cuando uno de los términos es un radical de segundo grado: Se reduce el término irracional de modo que tenga por coeficiente 2. Se divide el término racional en dos partes de modo que su producto sea igual á la cantidad que está dentro del radical. Se extrae la raíz cuadrada de cada una de estas partes, y se unen las raíces halladas por el signo del término irracional.

Extráigase la raíz cuadrada:

1. $13-\sqrt{160}.$

2. $14+6\sqrt{5}.$

3. $87-12\sqrt{42}.$

4. $8+\sqrt{48}.$

5. $2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}$.

6. $57 - 12\sqrt{15}$.

7. $14 + 3\sqrt{20}$.

8. $11 - 6\sqrt{2}$.

9. $38 - 12\sqrt{10}$.

10. $20 - 5\sqrt{12}$.

11. $13 + 2\sqrt{30}$.

12. $67 - 7\sqrt{72}$.

13. $9 - 2\sqrt{14}$.

14. $ax - 2a\sqrt{ax - a^2}$.

15. $103 - 12\sqrt{11}$.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

ECUACIONES DE UNA SOLA INCÓGNITA.

Regla.—Para resolver una ecuación de primer grado, y de una sola incógnita :

1° Se quitan los denominadores, si los hay.

2° Se pasan al primer miembro de la ecuación todas las cantidades que contienen la incógnita, y al otro las que no la contienen.

3° Se reunen en un solo término todos los términos que contienen la incógnita, y se reduce el segundo miembro de la ecuación á la forma más simple.

4° Se divide cada miembro de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones :

1. $14-5x=19+3x.$

2. $3x+m=b.$

3. $5x-1=19.$

4. $8x=5x+42.$

5. $3m+12x-c=x+d.$

6. $8x-29=26-3x.$

7. $9x+7=3x-11.$

8. $-5c^2d+ax=-bx-n$

9. $16x-11=7x+70.$

10. $5x+14=17-3x.$

11. $a+b-x-c^2=2c-bx.$

12. $26-8x=80-14x.$

13. $3+2(2x+3)=2x-3(2x+1).$

14. $a^3x-cd=b+a^2x-ax.$

15. $8+4x=12x-16.$

16. $9x-3(5x-6)=-30.$

17. $2x-(4x-1)=5x-(x-1).$

18. $(x-3)^2-(5-x)^2=-4x.$

19. $(x+5)^2-(4-x)^2=21x.$

20. $2(x-2)^2-3(x-1)^2=1-x^2.$

21. $6x-2(9-4x)+3(5x-7)=10x-(4+16x+35).$

22. $7(x-2)-5(x+3)=3(2x-5)-6(4x-1).$

23. $(x-2)(7-x)+(x+5)(x-3)-2(x-1)+12=0.$

24. $(x-1)(x-2)(x+4)=(x+2)(x+3)(x-4).$

25. $5(x-2)^2+7(x-3)^2=(3x-7)(4x-19)+42.$

26. $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=-11.$

27. $\frac{3x}{4}-\frac{5x}{6}+\frac{1}{18}=0.$

28. $\frac{x}{2}+\frac{x}{5}-\frac{2x}{10}=3a-m.$

29. $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=12.$

30. $\frac{2x+1}{2}=\frac{7x+5}{8}.$

31. $2x-\frac{3x}{4}=\frac{13}{14}-\frac{x}{7}.$

32. $\frac{x}{4}-\frac{x-3}{2}=71.$

33. $5x - \frac{x+2}{2} = \frac{a}{6}.$

34. $\frac{x+1}{2} + \frac{3x-4}{5} + \frac{1}{8} = \frac{6x+7}{8}.$

35. $\frac{7x}{4} - 7 = \frac{5x}{3} - \frac{9x}{4}.$

36. $\frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{6} = \frac{5}{12}.$

37. $x - \frac{3-x}{3} = \frac{17}{3}.$

38. $\frac{5-2x}{4} + 2 = x - \frac{6x-8}{2}.$

39. $7x - \frac{11x-3}{4} = 3x + 7.$

40. $\frac{x-4}{3} + \frac{2x}{7} = \frac{5}{14} - \frac{x-3}{2}.$

41. $\frac{x+2}{2} = \frac{14}{9} - \frac{3+5x}{4}.$

42. $\frac{2(x-1)}{3} - \frac{9}{5} = \frac{x+3}{7} - \frac{4}{5}.$

43. $2 - \frac{7x-1}{6} = 3x - \frac{19x+3}{4}.$

44. $\frac{x}{a+b} - \frac{x}{a-b} = 4.$

45. $\frac{y-5}{4} + 6y = \frac{284-y}{5}.$

46. $\frac{5x-2}{3} - \frac{3x+4}{4} - \frac{7x+2}{6} = \frac{x-10}{2}.$

47. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 77.$

48. $5x - \left\{8x - 3\left[16 - 6x - (4 - 5x)\right]\right\} = 6.$

49. $21+\frac{3x}{16}-\frac{11}{16}=\frac{5x-5}{8}+\frac{97+7x}{2}.$

50. $\frac{1}{2}(x+1)-\frac{2x-5}{5}=\frac{11x+5}{10}-\frac{x-13}{3}$

51. $x-\frac{x-3}{2}=\frac{9}{2}-\frac{x+4}{3}.$

52. $\frac{9x+20}{36}=\frac{4(x-3)}{5x-4}+\frac{x}{4}.$

53. $y+\frac{13-y}{3}=\frac{17-y}{2}.$

54. $\frac{5x+1}{3}+\frac{17x+7}{9}-\frac{1}{2}(3x-1)=\frac{7x-1}{6}.$

55. $\frac{x+3}{4}-\frac{x-8}{5}-\frac{x-5}{2}=-1.$

56. $\frac{18x-22}{39-6x}+2x+\frac{1+16x}{24}=4\frac{5}{12}-\frac{101-64x}{24}.$

57. $\frac{z-2}{3}+3z=\frac{5+z}{2}+1.$

58. $\frac{1+\frac{x}{4}+m}{\frac{z}{6}}=\frac{12(m+6)}{2x}.$

59. $\frac{4+x}{7}=\frac{1}{2}(3x-2)-\frac{11x+2}{14}-\frac{1}{3}(2-9x).$

60. $\frac{9x+5}{14}+\frac{8x-7}{6x+2}=\frac{36x+15}{56}+\frac{41}{56}.$

61. $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-4}{7x-16}=\frac{2x-1}{5}.$

62. $\frac{9x+20}{36}=\frac{4x-12}{5x-4}+\frac{x}{4}.$

63. $\frac{2}{2x-3}+\frac{1}{x-2}=\frac{6}{3x+2}.$

64. $\frac{1}{3}(x-a)-\frac{1}{4}(2x-3b)-\frac{1}{2}(a-x)=b-\frac{5}{6}a.$

65. $\frac{4x-a}{2x-a}-\frac{x+a}{x-a}=1.$

66. $\frac{4}{x-8}+\frac{3}{2x-16}-\frac{29}{24}=\frac{2}{3x-24}.$

67. $\frac{6x+13}{15}-\frac{3x+5}{5x-25}=\frac{2x}{5}.$

68. $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{2(x^2+4x+1)}{(x+2)^2}.$

69. $5-x\left(\frac{7}{2}-\frac{2}{x}\right)=\frac{x}{2}-\frac{3x-(4-5x)}{4}.$

70. $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-7}.$

ECUACIONES QUE CONTIENEN RADICALES.

Regla.—Para resolver ecuaciones de primer grado, que contienen expresiones radicales:

Se pasan los términos de la ecuación de un miembro á otro, de tal manera que el radical esté solo en un miembro; en seguida se elevan los dos miembros de la ecuación á la potencia indicada por el índice del radical. Si hay todavía otros radicales, se repite la operación.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones :

1. $\sqrt{5x-1}-2=1.$

2. $\sqrt{4x+16}=12.$

3. $\sqrt{4x^2-19}-2x=-1.$

4. $\sqrt{x-16}=8-\sqrt{x}.$

5. $\sqrt[3]{x^3-6x^2}-x+2=0.$

6. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{ax}.$

7. $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+12}=-3.$

8. $a+x=\sqrt{a^2+x\sqrt{b^2+x^2}}.$

9. $\sqrt{(x-a)^2+2ab+b^2}=x-a+b.$

10. $2\sqrt{b+x}-\sqrt{4a+x}=\sqrt{x}.$

11. $\sqrt{x^2+4x+12}+\sqrt{x^2-12x-20}=8.$

12. $x+\sqrt{a-x}=\dfrac{a}{\sqrt{a-x}}.$

13. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}-\sqrt{4x-3}=0.$

14. $\dfrac{\sqrt{x}+28}{\sqrt{x}+4}=\dfrac{\sqrt{x}+38}{\sqrt{x}+6}.$

15. $\sqrt{9+x\sqrt{x^2-3}}=x-3.$

16. $\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x}+1}=1+\dfrac{\sqrt{3x}-1}{2}.$

17. $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{4x+a+3b}.$

18. $\dfrac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{3}+2\sqrt{a}.$

19. $\sqrt{a^2-2ax+x^2\sqrt{3a-x}}=a-x.$

20. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a}=\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\sqrt{\dfrac{4}{a^2x^2}+\dfrac{9}{x^4}}}.$

PROBLEMAS.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA SOLA INCÓGNITA.

1. ¿Cuál es el número que sumado con las cuatro séptimas partes del mismo, da por suma el duplo del número menos 33 ?

2. ¿Cuál es el número cuyo duplo sumado con 26, da por resultado 62 ?

3. Encontrar el número cuyo tercio y cuarto juntos, suman 35.

4. La edad de A es tres veces la de B, y hace 8 años fué siete veces la de B. Se quiere saber la edad actual de cada uno.

5. ¿Cuál es el número cuyo duplo sumado con 16, da por resultado cuatro veces el número pedido ?

6. Encontrar el número cuya tercera parte excede á su cuarta parte en 2.

7. A tenia dos veces tanto dinero como B ; pero despues de haber dado á B 35 pesos, le quedó solamente la tercera parte de lo que tenía B. ¿Cuánto tenía cada uno ?

8. ¿Cuál es el número cuyo duplo excede á su mitad 25 ?

9. La mitad de un número sumada con su cuarta y quinta partes es igual á 19. ¿Cuál es el número ?

10. ¿Cuál es el número cuyo duplo excede á su mitad en 45 ?

11. Dividir el número 34 en dos partes, tales que las cuatro séptimas de una de ellas sea igual á las dos quintas de la otra.

12. Dos personas juntas tienen $18,000, y la primera tiene tres veces tanto como la segunda. ¿Cuántos pesos tiene cada uno?

13. Dividir el número 45 en dos partes, tales que el séptimo de la primera parte sea igual al octavo de la segunda.

14. Habiéndosele preguntado á un hombre cuantos años tenía, respondió: "Si á mi edad se agrega la mitad, un tercio, y despues se quitan 18, se tendrá por resultado 70." ¿Cuántos años tenía?

15. ¿Cuál es el número que excede á la suma de su tercera, décima y dozava partes en 29?

16. Dividir el número 50 en dos partes, tales que la cuarta parte de una de ellas sumada con las cinco sextas partes de la otra nos dé 40.

17. Después de haber pagado la séptima parte de una deuda, y luego la quinta parte, una persona queda debiendo 92 pesos. ¿Cuál fué la deuda al principio?

18. Dividir el número 65 en dos partes, tales que la cuarta parte de la una menos la tercera parte de la otra sea igual á 4.

19. Dividir el número 76 en dos partes, de tal modo que la séptima parte de la mayor sumada con la tercera parte de la menor sea igual á 16.

20. La suma de dos números es 82, y la diferencia es 26. ¿Cuáles son los números?

21. Sumadas la cuarta de un número con la quinta y sexta partes la suma excede á la mitad del número en 7. ¿Cuál es el número?

22. Dividir el número 207 en dos partes, tales que la cuarta parte de la mayor exceda en 3 á las dos séptimas partes de la menor.

23. En cierta cantidad de pólvora el nitro pesó 6 libras más que la mitad del peso de la pólvora: el azufre 5 libras menos que la tercera parte, y el carbón, 3 libras menos que la cuarta parte del peso de la pólvora. ¿Cuántas libras había de cada parte?

24. La diferencia de dos números es 3, y la diferencia de sus cuadrados es 51. ¿Cuáles son los números?

25. A, B, C, y D hicieron un fondo común de \$4755; B puso tres veces tanto como A, y C puso tanto como A y B juntos, y D puso tanto como C y B juntos. ¿Cuánto puso cada uno?

26. Un negociante ha mezclado vino y agua. La cantidad de vino fué 25 litros más que la mitad de la mezcla, y la del agua fué 5 litros menos que la tercera parte de la mezcla. ¿Cuántos litros mezcló de cada parte?

27. Multiplicando cierto número por 4 y dividiendo el producto por 3 se obtiene 24. ¿Cuál es el número?

28. En cierta elección votaron 765 hombres. El candidato elegido recibió 87 votos más que el otro. ¿Cuántos votos recibió cada uno?

29. Una casa y su jardín costaron \$850; cinco veces lo que se pagó por la casa es igual á dos veces el precio del jardín. ¿Cuánto se pagó por la casa y cuánto por el jardín?

30. Una persona después de haber gastado $\frac{1}{3}$ de su salario por alimento y renta, $\frac{1}{8}$ por ropa, y $\frac{1}{10}$ para ayudar á los pobres, tiene \$318. ¿Cuál es su salario?

31. Dividir el número 80 en dos partes, de tal modo que si se resta la mayor de 62, y la menor de 48, las restas resulten iguales.

32. La edad de A es tres veces la de B, y en 12 años será doble la de B. ¿Cuál es la edad de cada uno?

33. La suma de dos números es 185, y su diferencia es igual á la quinta parte de la parte mayor. ¿Cuáles son los números?

34. Dividir 60 en dos partes, de modo que la primera parte dividida por 3 sea igual á la segunda multiplicada por 3.

35. A tiene 62 años, y B tiene 36 años. ¿Cuántos años hace que la edad de A fué tres veces la de B?

36. Un hombre repartió 120 centavos entre 4 mendicantes; á los dos primeros dió cantidades iguales, al tercero dió dos veces lo que dió al primero, y al cuarto el duplo de lo que dió al tercero. ¿Cuántos centavos recibió cada uno?

37. ¿Cuál es el número cuya quinta parte sumada con su séptima parte excede á la diferencia de su cuarta y séptima parte en 33?

38. B tenía dos veces tantos pesos como C, pero despúes de que B le dió á C \$42, éste tuvo cuatro veces tanto como B. ¿Cuántos pesos tenía cada uno al principio?

39. Un hombre dejó al morir sus bienes para que se dividiesen segun su disposición, del modo siguiente: á su esposa tocó la mitad de la herencia; á cada uno de sus hijos la sexta parte de ella; á un hermano la dozava parte, y á una hermana lo que quedó, que fueron \$720. ¿Cuál era el monto de la herencia?

40. Un regimiento se compone de 2250 hombres; la infantería es igual á 10 veces la caballería, y la caballería es igual á 3 veces la artíllería. ¿De cuántos hombres se compone cada división?

41. Habiéndosele preguntado á un muchacho cuántos años tenía, respondió: "15 años son 9 años más que las tres quintas partes de mi edad." ¿Qué edad tenía?

42. La suma de las edades de un padre y su hijo es igual á la mitad de lo que será dentro de 25 años; y la diferencia es igual á un tercio de lo que será la suma dentro de 20 años. Se quiere saber la edad de cada uno.

43. A tiene 18 años más que B; y el exceso de su edad sobre 30 es igual al exceso de 20 sobre la edad de B. ¿Cuál es la edad de cada uno?

44. Si á cierto número se agregan 30, el exceso de 75 sobre la mitad de la suma será igual al exceso del número sobre 60. ¿Cuál es el número?

45. Dos tubos llenan una cisterna, el primero en 30 minutos y el segundo en 36 minutos, y otro tubo puede vaciarla en 25 minutos. ¿En qué tiempo se llenaría la cisterna si los tres tubos corriesen juntos?

46. Habiéndosele preguntado á un muchacho cúantas ovejas tenía su padre, respondió que 52 eran 7 más que los $\frac{5}{6}$ del número de ovejas. ¿Cuántas ovejas tenía?

47. Encontrar cuatro números consecutivos cuya suma sea 90.

48. *A* puede acabar una obra en $3\frac{1}{2}$ días, *B* en $4\frac{1}{2}$ días, y *C* en $5\frac{3}{4}$ días. ¿En qué tiempo harían la obra si trabajasen juntos?

49. *A* hace las $\frac{3}{10}$ partes de una obra en 3 días; luego *B* le ayuda, y los dos juntos acaban la obra en 5 días. Se quiere saber qué tiempo empleará cada uno haciendo la misma obra.

50. Tres tubos vacían una cisterna, el primero en 90 minutos, el segundo en 210 minutos y el tercero en 6

horas. ¿En qué tiempo se vaciará la cisterna si los tres tubos están abiertos al mismo tiempo?

51 *A* puede hacer una obra en 14 días y *B* en 16 días. ¿En cuántos días acabarán la obra si los dos trabajan juntos?

52. La cabeza de un pez tiene 9 pulgadas de largo; el largo de la cola es igual al largo de la cabeza más la mitad del largo del cuerpo, y el largo del cuerpo es igual al largo de la cabeza más el largo de la cola. ¿Cuántas pulgadas de largo tiene el pez?

53. *A* y *B* trabajando juntos hacen una obra en 9 días; *A* y *C* juntos hacen la misma obra en 6 días, y *B* y *C* en 12 días. ¿En qué tiempo hará la obra cada uno si trabaja solo? ¿En qué tiempo acabarán la obra si trabajan los tres juntos?

54. Hace 11 años *A* tenía 4 veces tantos años como *B*, y en 13 años más la edad de *A* será doble la de *B*. ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

55. Dos tubos llenan un depósito, el primero en 4 horas, y el segundo en 6 horas, y otro tubo puede vaciarlo en 10 horas. ¿En qué tiempo se llenaría el depósito si los tres tubos corriesen juntos?

56. Durante la guerra una compañía de soldados robó á un pastor, llevándose la cuarta parte de su rebaño más la cuarta parte de una oveja; otra compañía se llevó la tercera parte de las ovejas que quedaron más la tercera parte de una oveja; otra compañía se llevó la mitad de las ovejas que quedaron más la mitad de una oveja; le quedaron al pastor 25 ovejas. ¿Cuántas tenía al principio?

57. Hay tres tubos que desaguan en un mismo estanque. El primero puede llenarlo en 2 horas 25 minutos;

el segundo en 4 horas 25 minutos; y el tercero en 6 horas. ¿En qué tiempo lo llenarían si fluyesen juntos los tres tubos?

58. Un obrero fué empleado por 44 días para hacer una obra, bajo la condición de que recibiría $1.40 por día que trabajase, y por cada día que no trabajase habría de perder 60 centavos. Al fin de los 44 días recibió $20. ¿Cuántos días trabajó y cuántos días no trabajó?

59. Un barril contiene 16 litros de vino mezclado con 20 litros de agua; otro barril contiene 12 litros de vino mezclado con 6 litros de agua. ¿Cuántos litros deben sacarse de cada barril para hacer una mezcla de 8 litros de vino y 8 litros de agua?

60. Un correo que corre á razón de $10\frac{1}{2}$ leguas en 6 horas, parte de una ciudad: 6 horas más tarde sale de la misma ciudad otro correo para alcanzar al primero, corriendo á razón de $7\frac{1}{2}$ leguas en 4 horas. ¿En cuántas horas alcanzará el segundo al primero?

61. *A* hace una obra en 18 dias, y *B* hace la misma obra en 21 días. ¿En cuántos días acabarán la obra trabajando los dos juntos?

62. Un general cuya caballería era igual á la tercera parte de la infantería, despues de una derrota descubrió que antes de la batalla habían desertado la dozava parte de la infantería menos 120, y la dozava parte de la caballería más 120. Después de la batalla descubrió que la cuarta parte de su ejército original estaba en el cuartel, los $\frac{3}{8}$ en el campo, y que los demás de los que habían combatido fueron presos ó muertos; 300 sumados con el número de los muertos y presos dieron un número igual á la mitad de la infantería que tenía al principio. ¿De cuántos soldados se componía el ejército al principio?

63. Tres tubos vacían un receptáculo, el primero en 80 minutos, el segundo en 200 minutos, y el tercero en 5 horas. ¿En qué tiempo se vaciará el receptáculo si los tres tubos están abiertos al mismo tiempo?

64. Un cierto número de balas de cañón fué dividido entre varias compañías de artillería. La primera recibió 72 y la novena parte de las que quedaron; la segunda recibió 144 y la novena parte de las que quedaron; la tercera recibió 216 y la novena parte de las que quedaron; la cuarta recibió 288 y la novena parte de las que quedaron; y así sucesivamente hasta que todas las balas fueron repartidas. Después de haber sido repartidas se descubrió que todas las compañías habían recibido un número igual de balas. ¿Cuál fué el número total de balas y cuántas compañías había?

65. México dista de Aguascalientes 133 leguas. Un viajero sale de Aguascalientes para ir á México, caminando á razón de 3 leguas por hora; otro sale de México para ir á Aguascalientes, caminando á razón de 2 leguas por hora. ¿A qué distancia de México se encontrarán?

66. Un hombre dejó al morir sus bienes para que se dividiesen del modo siguiente: al hijo mayor dejó $1800 y la sexta parte de lo que quedó; al segundo hijo el duplo de esa cantidad y la sexta parte de lo que quedó; al tercer hijo el triple de la misma cantidad y la sexta parte de lo que quedó, y así sucesivamente hasta que todo se había repartido. Por medio de este arreglo todos recibieron cantidades iguales. ¿Cuántos hijos tenía y cuál fué la herencia de cada uno?

67. El segundo guarismo de un número excede al primero en 2; si á este número se agregan 6 y el resultado

se divide por la suma de los guarismos, el cociente será 5. Se quiere determinar el número.

68. Dos personas salieron de una ciudad en direcciones opuestas. La primera caminó á razón de una milla por hora menos que el duplo de lo que caminó la otra. Al fin de 4 horas se encontraron la una de la otra á distancia de 32 millas. Se quiere determinar cuántas millas caminó cada una por hora.

69. El primer guarismo de cierto número es tres veces el segundo; si al número se agregan 6 y el resultado se divide por la diferencia de los guarismos, el cociente será 8. ¿Cuál es el número?

70. Un tren que camina 12 leguas por hora dilata dos horas para recorrer cierta distancia menos de lo que dilata otro tren que camina 8 leguas por hora. ¿Cuál es la distancia?

71. Un padre tenía tres hijos, á los cuales dejó sus bienes para que se dividiesen del modo siguiente: Al hijo mayor dejó $1000 y la cuarta parte de lo que quedó; al segundo dejó $2000 y la cuarta parte de lo que quedó; al tercero dejó $3000 y la cuarta parte de lo que quedó. Por medio de este arreglo todos los bienes fueron divididos entre los tres hijos. ¿Cuál fué el monto de la herencia?

72. Un conejo da 4 saltos mientras que un galgo da 3: pero 2 de los saltos del galgo son equivalentes á 3 del conejo. El conejo está á la distancia de 50 saltos del galgo. ¿Cuántos saltos tiene que dar el galgo para alcanzar al conejo?

73. El segundo guarismo de un número excede al primero en 3; si del número se restan 9 y la diferencia se

divide por la suma de los guarismos, el cociente será 3. ¿Cuál es el número?

74. ¿A qué hora entre las 2 y las 3 están opuestas las manecillas de un reloj ?

75. ¿A qué hora entre las 5 y las 6 están juntas las manecillas de un reloj ?

76. Un lobo se ve perseguido por un galgo, y le lleva una ventaja de 60 saltos. El lobo da 3 saltos mientras que el galgo da 2 ; pero el galgo avanza en 3 saltos lo que el lobo avanza en 7. ¿Cuántos saltos tiene que dar cada uno para que el galgo pueda alcanzar al lobo ?

77. ¿A qué hora entre las 10 y las 11, están en posición perpendicular las manecillas de un reloj ?

78. ¿A qué hora entre la una y las dos están juntas las manecillas de un reloj ?

79. Un muchacho que corre á razón de 12 metros por segundo, corre 20 metros detrás de otro que corre á razón de $10\frac{1}{2}$ metros por segundo. ¿En qué tiempo estará el primero 10 metros adelante del segundo ?

80. El denominador de cierto quebrado excede al numerador en 1. Si al denominador se agregan 2, el quebrado que resulta es igual al quebrado original menos la unidad. ¿Cuál es el quebrado ?

81. Tengo dos tazas de plata, y una sola cubierta para las dos tazas. La primera pesa 12 onzas, y con la cubierta pesa el duplo de lo que pesa la otra sin ella ; pero la segunda con la cubierta pesa $\frac{1}{3}$ más que la primera sin ella. Encontrar el peso de la cubierta.

82. La distancia entre P y Q es de 20 kilómetros. Una persona sale de P con dirección á Q caminando á razón de 3 kilómetros por hora ; 20 minutos más tarde

otra persona sale de Q con dirección á P caminando á razón de 5 kilómetros por hora. ¿A qué distancia de P se encontrarán ?

83. Un comerciante emprende un negocio con un capital de $4000, y añade á ese capital una cuarta parte cada año. Al fin de cada año separa una cantidad determinada para gastos. Al cabo de tres años descubre que el capital se ha reducido á $2475. ¿Cuáles son los gastos anuales ?

84. Al formar un cuadro con una compañía de soldados, sobraron 60 soldados ; al aumentar cinco soldados á cada fila el número de filas disminuyó 3, y se necesitó de un soldado para completar el rectángulo. ¿Cuántos soldados había ?

85. El largo y el ancho de un rectángulo son respectivamente 5 piés más largo y 3 piés más angosto que los lados de un cuadrado equivalente. Se desea encontrar el área del rectángulo.

86. Dos personas que están á la distancia de 63 millas una de otra, salen al mismo tiempo para encontrarse. Una camina 4 millas por hora, y la otra 3 millas por hora. ¿Qué distancia tendrá que caminar cada una para encontrarse?

87. Un galgo da 2 saltos mientras que un conejo da 3; pero uno de los saltos del galgo es equivalente á dos del conejo. Si el conejo está distante del galgo cosa de 80 saltos suyos, ¿Cuántos saltos tendrá que dar el galgo para alcanzar al conejo?

88. Una persona tiene $4\frac{1}{2}$ horas libres. ¿Qué distancia puede ir en coche caminando á razón de 5 kilómetros por hora para regresar á pié á razón de 3 kilómetros por hora?

89. Un hombre vendió un caballo en $200 sufriendo una pérdida; si lo hubiera vendido en $250, la ganancia habría sido igual á los $\frac{3}{4}$ de la pérdida que sufrió al venderlo en $200. Se quiere saber el valor del caballo.

90. El denominador de un quebrado excede al numerador 6; si al denominador se agregan 8, el valor del quebrado será igual á $\frac{1}{3}$. ¿Cuál es el quebrado?

91. Un barril contiene 12 litros de vino y 18 litros de agua; otro barril contiene 9 litros de vino y 3 litros de agua. ¿Cuántos litros deben sacarse de cada barril para hacer una mezcla que contenga 7 litros de vino y 7 litros de agua?

92. ¿A qué hora entre las 3 y las 4 están opuestas las manecillas de un reloj?

93. A hace una obra en 12 horas; A y C juntos la hacen en 5 horas; y C hace los $\frac{2}{3}$ de lo que hace B en el mismo tiempo. La obra tiene que ser terminada al medio dia. A empieza á trabajar á las 5 de la mañana. ¿A qué hora puede ser sustituido A por B y C de manera que la obra quede terminada á las doce en punto?

94. Un hombre compró una pintura y un marco, pagando por el marco los $\frac{3}{4}$ de lo que pagó por la pintura. Si el marco hubiera costado 2 pesos menos de lo que costó, y la pintura 60 centavos más, el precio del marco habría sido igual á la tercera parte del precio de la pintura. ¿Cuánto costó el marco y cuánto la pintura?

95. En un club cada individuo se suscribió con una cantidad igual al número de miembros. Si hubiera habido 12 miembros más, cada uno habría tenido que suscribirse con 10 pesos menos para completar la misma cantidad. ¿Cuántos miembros hay?

96. Una persona compró cierto número de huevos á

razón de 3 por 10 centavos. Vendió la tercera parte de ellos á razón de 2 por 7 centavos, y los demás á razón de 4 por 15 centavos; de esta manera ganó 16 centavos. ¿Cuántos huevos compró?

97. Un general al formar sus soldados en cuadro, descubre que le sobran 21. Pero al tratar de añadir un soldado á cada lado del cuadro, encuentra que le faltan 200 soldados para completar el cuadro. Se quiere saber cuántos soldados tuvo por cada lado al principio, y el número total de soldados.

98. Un hombre quiere cercar con tablas á un pedazo circular de terreno; si se colocan á la distancia de un pié una de otra le faltan 150 tablas para completar el número necesario; pero si se colocan á la distancia de una vara le sobran 70. ¿Cuál es la circunferencia del terreno?

99. Dos personas se hallan una de otra á la distancia de 26 kilómetros. Una sale para encontrar la otra, caminando á razón de 3 kilómetros por hora. Media hora después sale la otra, caminando á razón de 4 kilómetros por hora. ¿Qué distancia habrá caminado cada una al encontrarse?

100. Un pastor perdió un número de ovejas igual á la cuarta parte de su rebaño más la cuarta parte de una oveja; después perdió un número igual á la tercera parte de las que quedaron más la tercera parte de una oveja; más tarde perdió un número igual á la mitad de las que tenía, más la mitad de una oveja. Al fin le quedaron 25 ovejas. ¿Cuántas tenía al principio?

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS.

ELIMINACIÓN POR COMPARACIÓN.

Regla.—Se saca de cada ecuación el valor de una misma incógnita en función de la otra y las cantidades conocidas ; en seguida se igualan estos valores.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones :

1. $3x+5y=29.$
   $4x-2y=4.$

2. $4x+y=34.$
   $4y+x=16.$

3. $x+15y=53.$
   $3x+y=27.$

4. $x-y=-1.$
   $3x+5y=21.$

5. $4x+9y=51.$
   $8x-13y=9.$

6. $2x+5z=29.$
   $x-2z=1.$

7. $5x+4y=58.$
   $3x+7y=67.$

8. $15x+6y=-7.$
   $8y-21x=18.$

9. $17x+12y=59.$
   $19x-4y=153.$

10. $7x+3y=6.$
$11x+9y=8.$

11. $\frac{4x+3y}{9}+y=4.$

$x+\frac{8x-2y}{5}=7.$

12. $11x+3y=100.$
$4x-7y=\ \ 4.$

13. $8x-21y=\ 33.$
$6x+35y=177.$

14. $12x+14y=26.$
$3x-y\ \ =\ 2.$

15. $7y-12x=17.$
$8x+11y=20.$

ELIMINACIÓN POR SUSTITUCIÓN.

Regla.—Se saca en una de las ecuaciones el valor de una incógnita en función de la otra y las otras cantitades conocidas; en seguida se sustituye el valor de esta incógnita en la otra ecuación.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones :

1. $3x-4y=2.$
$7x-9y=7.$

2. $3x+2y=23.$
$x+4y=21.$

3. $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=\ 8.$

$\frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=11.$

4. $7y - 3x = 139.$
$2x + 5y = 91.$

5. $8x + 3y = 3.$
$12x + 9y = 3$

6. $2y + 4x = 62.$
$y + 5x = 73.$

7. $\frac{3x - 5y}{2} + 3 = \frac{2x + y}{5}.$
$8 - \frac{x - 2y}{4} = \frac{x}{2} + \frac{y}{3}.$

8. $5x + 7y = -19.$
$4x + 5y = -14.$

9. $9y - 7x = 13.$
$15x - 7y = 9.$

10. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1.$

ELIMINACIÓN POR REDUCCIÓN.

Regla.—Se multiplican las dos ecuaciones por números tales que hagan iguales los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar; en seguida se suman las ecuaciones cuando los términos que contienen la incógnita que se quiere eliminar tienen signos contrarios, y se restan cuando estos términos llevan el mismo signo.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

1. $2x + 3y = 7.$
$4x - 5y = 3.$

2. $77x - 12y = 289.$
$55x + 27y = 491.$

3. $3x+5y=2.$
$15x-5y=4.$

4. $7x-11y=-58.$
$15x+8y=2.$

5. $4x+y=13.$
$6x+12y=72.$

6. $y+\frac{5x+2y}{6}-\frac{3y-12+8x}{5}=4-\frac{15+2x-4y}{3}.$
$\frac{7x+13-5y}{4}+x=2y-\frac{3x+2y-16}{3}.$

7. $9x-11y=24.$
$10x+9y=-37.$

8. $5x+4y=58.$
$3x+7y=67.$

9. $15y-8x=12.$
$25y+12x=1.$

10. $5x-3y=19.$
$7x+4y=2.$

EJERCICIOS DIVERSOS.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones por cualquier método de eliminación:

1. $\frac{x-2}{5}-\frac{10-x}{3}=\frac{y-10}{4}.$
$\frac{2y+4}{3}-\frac{2x+y}{8}=\frac{x+13}{4}.$

2. $\frac{3x+2y}{6}-\frac{y-5}{4}=\frac{11x+152}{12}-\frac{3y+1}{2}.$
$x-\frac{3y-2+x}{11}=1+\frac{15x+\frac{4}{3}y}{33}.$

3. $\frac{x-y}{5}+\frac{x+y}{19}=4.$

$x-y=10.$

4. $\frac{x}{2}-12=\frac{y}{4}+8.$

$\frac{x+y}{5}-\frac{2y-x}{4}=15.$

5. $\frac{4x-3y-7}{5}=\frac{3x}{10}-\frac{2y}{15}-\frac{5}{6}.$

$\frac{y-1}{3}+\frac{x}{2}-\frac{3y}{20}-1=\frac{y-x}{15}+\frac{x}{6}+\frac{1}{10}.$

6. $3x+6y+1=\frac{6x+130-24y^2}{2x-4y+3}.$

$3x-\frac{151-16x}{4y-1}=\frac{9xy-110}{3y-4}.$

7. $\frac{x}{m}+ny=m+n.$

$\frac{mx}{n}+\frac{n^3y}{m}=m^2+n^2.$

8. $\frac{x-5}{4}-\frac{2x-y-1}{3}=\frac{2y-2}{5}.$

$\frac{2y+x-1}{9}=\frac{x+y}{4}.$

9. $\frac{6x+9}{4}+\frac{3x+5y}{4x-6}=3\frac{1}{4}+\frac{3x+4}{2}.$

$\frac{8y+7}{10}+\frac{6x-3y}{2y-8}=4+\frac{4y-9}{5}.$

10. $x^2-4y^2-17=(x+2y-2)(x-2y+1).$

$\frac{xy-5}{y-2}+\frac{1-2x}{y-1}=x.$

11. $\frac{x+1}{3}-\frac{y+2}{4}=\frac{2(x-y)}{5}.$

$\frac{x-3}{4}-\frac{y-3}{3}=2y-x.$

12. $4x^2+4xy+272=(x+y)(4x+17).$

$\frac{y(x-y)+54}{x-y}=\frac{5y+27}{5}.$

13. $1+\frac{25+5y}{6}-\frac{7x-6}{3}=10-\frac{3x-10+7y}{12}.$

$\frac{96+8x}{22}=5x-\frac{14+y}{3}.$

14. $(x+7)(y-2)+3=2xy-(y-1)(x+1).$

$3y+11=\frac{4x^2-y(x+3y)}{x-y+4}+31-4x.$

15. $\frac{x-2y}{2x-4y-1}=\frac{3x}{6x-1}.$

$x-\frac{3-5y}{x+2}=\frac{4x-13}{4}.$

16. $y+\frac{5x+2y}{6}-\frac{3y-12+8x}{5}=4-\frac{15+2x-4y}{3}.$

$\frac{7x+13-5y}{4}+x=2y-\frac{3x+2y-16}{3}.$

17. $\frac{2x-y+3}{3}-\frac{x-2y+3}{4}=4.$

$\frac{3x-4y+3}{4}+\frac{4x-2y-9}{3}=4.$

18. $\frac{2x}{3}-\frac{3y}{5}-\frac{x+2y}{4}=3-\frac{5x-6y}{4}.$

$\frac{x}{2}+y-\frac{3x-y}{5}=-5+\frac{x}{15}.$

19. $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=10.$

$\frac{4}{x}+\frac{3}{y}=20.$

20. $mx+ny=\frac{m^4+n^4}{m^2n^2}.$

$nx+my=\frac{m^2-n^2}{mn}.$

21. $\frac{15}{x}+\frac{21}{y}=10.$

$\frac{20}{x}-\frac{6}{y}=2.$

22. $\frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a^2-b^2}.$

$\frac{x}{a-b}+\frac{y}{a+b}=\frac{1}{a^2-b^2}.$

23. $\frac{m^2}{x}+\frac{n^2}{y}=mn(m+n).$

$\frac{n}{x}+\frac{m}{y}=m^2+n^2.$

24. $bcx=cy-2b.$

$b^2y+\frac{a(c^3-b^3)}{bc}=\frac{2b^3}{c}+c^3x.$

25. $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=16.$

$\frac{1}{2x}+\frac{4}{y}=-15.$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON VARIAS INCÓGNITAS.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

1. $$\begin{cases} 5x+3y-6z=4. \\ 3x-\ \ y+2z=8. \\ \ \ x-2y+2z=2. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 6x-4y-\ \ 7z=17. \\ 9x-7y-16z=29. \\ 10x-5y-\ \ 3z=23. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x+y=30. \\ x+z=25. \\ y+z=15. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 8x+4y-3z=6. \\ \ \ x+3y-\ \ z=7. \\ 4x-5y+4z=8. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 7x+4y-\ \ z=-50. \\ 4x-5y-3z=20. \\ \ \ x-3y-4z=30. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 3u+\ \ x+2y-z=22. \\ 4x-\ \ y+3z=35. \\ 4u+3x-2y=19. \\ 2u+4y+2z=\ -46. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} 3x-2y=5. \\ 4x-3y+2z=11. \\ \ \ x-2y-5z=\ -7. \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} 4x-3y+2z=40. \\ 5x+9y-7z=47. \\ 9x+8y-3z=97. \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} 2x+y+z=-2. \\ x+2y+z=0. \\ x+y+2z=-4. \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} 15y=24z-10x+41. \\ 15x=12y-16z+10. \\ 18x-(7z-13)=14y. \end{cases}$$

11. $$\begin{cases} x-ay+a^2z=a^3. \\ x-by+b^2z=b^3. \\ x-cy+c^2z=c^3. \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=124. \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=94. \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{6}=76. \end{cases}$$

13. $$\begin{cases} y-z-\frac{x+z}{2}=1. \\ \frac{x-y}{5}-\frac{x-z}{6}=0. \\ \frac{y+z}{4}-\frac{x+y}{2}=-4. \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=6. \\ y+\frac{z}{2}+\frac{x}{3}=-1. \\ z+\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=17. \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{4}{z}=\frac{1}{12}. \\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=\frac{19}{24}. \\ -\frac{4}{x}+\frac{5}{y}+\frac{6}{z}=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=5. \\ \frac{3}{y}-\frac{4}{z}=-6. \\ \frac{3}{z}-\frac{4}{x}=5. \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=-7. \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}+\frac{4}{z}=9. \\ \frac{3}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=5. \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} \frac{3y-1}{4}=\frac{6z}{5}-\frac{x}{2}+1\frac{4}{5}. \\ \frac{5x}{4}+\frac{4z}{3}=y+\frac{5}{6}. \\ \frac{3x+1}{7}-\frac{z}{14}+\frac{1}{6}=\frac{2z}{21}+\frac{y}{3}. \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} 2-z-\frac{3x=y}{4}=0. \\ 8-\frac{y+16z}{3}=3x. \\ 25-12(x+z)=-y. \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=a. \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=b. \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=c. \end{cases}$$

PROBLEMAS.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON VARIAS INCÓGNITAS.

1. Encontrar dos números cuya suma dividida por 2 dé 28, y cuya diferencia dividida por 2 dé 4.

2. Hallar dos números de los cuales tres veces el mayor sumado con la tercera parte del menor dé 99; y si de 6 veces el menor se resta dos veces el mayor, y la resta se divide por 17, el cociente sea 6.

3. Dividir 43 en dos partes tales que los $\frac{3}{5}$ de la mayor excedan en 5 á los $\frac{5}{9}$ de la menor.

4. El triple del mayor de dos números excede al duplo del menor 8; y el duplo del mayor sumado con el triple del menor da 27. ¿Cuáles son los números?

5. Dividir 50 en dos partes tales que los $\frac{3}{8}$ del mayor sean iguales á los $\frac{2}{3}$ del menor.

6. Si el numerador de cierto quebrado se duplica, y si al denominador se agregan 7, el valor del quebrado será igual á $\frac{2}{3}$; pero si se duplica el denominador, y si al numerador se agregan 2, el valor del quebrado será igual á $\frac{3}{5}$. ¿Cuál es el quebrado?

7. Hace siete años la edad de un padre era cuatro veces la de su hijo; en siete años la edad del padre será doble de la del hijo. ¿Cuáles son las edades de los dos?

8. Sí B da á C \$5, tendrán cantidades iguales; pero si C da á B \$5, B tendrá tres veces más que C. ¿Cuántos pesos tiene cada uno?

9. Si B da á C \$5, tendrá \$6 menos que C; pero si C

le da $5, tres veces la cantidad que tendrá menos $20, será igual á cuatro veces la cantidad que *C* tendrá. ¿Qué cantidad tiene cada uno?

10. Un hombre pagó $300 por 2 caballos con la guarnición. El precio de uno de los caballos, con la guarnición, más $20, era igual al precio del otro; y el precio del otro caballo, con la guarnición, era doble al del primero. ¿Cuál fué el precio de cada caballo?

11. Encontrar el número tal que si se agregan 7 á la suma de sus guarismos, la suma sea igual á tres veces el segundo guarismo; pero si del número mismo se restan 18, el orden de los guarismos se invierte.

12. Si al numerador de cierto quebrado se agregan 7, el quebrado que resulta será igual á 2; y si se resta 1 del denominador el quebrado será igual á 1. ¿Cuál es el quebrado?

13. Hay cuatro números cuya suma es 136. Dos veces el primero excede al segundo 46, dos veces el segundo excede al tercero 44, y dos veces el tercero excede al cuarto 40. ¿Cuáles son los números?

14. Cierto número está compuesto de dos guarismos: el número es igual á 3 veces la suma de sus guarismos; pero si se multiplica el número por 3, el producto será igual al cuadrado de la suma de los guarismos. ¿Cuál es el número?

15. Un muchacho gastó todo su dinero en comprar naranjas. Si hubiera recibido 5 naranjas más por la misma cantidad de dinero, cada una le habría salido medio centavo más barata; si hubiera recibido 3 menos, cada una le habría salido medio centavo más cara. ¿Cuánto dinero tenía y cuántas naranjas recibió?

16. Si se agregan 4 al denominador de cierto quebrado, el valor del quebrado será igual á $\frac{7}{9}$; y si se quitan 15 del numerador el valor será igual á $\frac{20}{41}$. ¿Cuál es el quebrado?

17. Encontrar dos quebrados cuyos numeradores sean iguales á 2 y 5 respectivamente, cuya suma sea igual á $1\frac{1}{2}$, y cuya suma sea igual á 2 al alternar los denominadores.

18. Un hijo le preguntó á su padre cuántos años tenía. El padre respondió: "Si se quitan 5 años de mi edad, y la resta se divide por 8, el cociente será igual á la tercera parte de la tuya; pero si se agregan 2 años á tu edad, y se multiplica la suma por 3, y luego se restan 7 del producto, tendrás el mismo número de años que yo." ¿Cuántos años tenía el padre y cuántos el hijo?

19. Un comerciante tiene tres clases de azúcar. Vende 3 libras de la primera, 4 de la segunda, y 2 de la tercera, en 60 centavos; ó, 4 libras de la primera, 1 de la segunda y 5 de la tercera, en 59 centavos; ó, 1 libra de la primera, 10 de la segunda y 3 de la tercera, en 90 centavos. ¿Cuál es el precio por libra de cada clase?

20. La suma de los dos guarismos de cierto número es igual á 10, y si al número se agregan 54 los guarismos serán alternados. ¿Cuál es el número?

21. Encontrar el número tal que si se divide por la suma de sus dos guarismos menos 2, el cociente sea igual á 5 quedando 1 como resta; si se alternan los guarismos, y el número que resulta se divide por la suma de los guarismos más 2, el cociente sea igual á 5, quedando 8 como resta.

22. Se ha repartido una suma de dinero entre varias

personas, recibiendo cada una cantidades iguales. Si hubiera habido 4 personas más, cada una habría recibido 1 peso menos, y si hubiera habido 4 personas menos, cada una habría recibido 2 pesos más de lo que recibió. ¿Cuántas personas había y qué cantidad recibió cada una?

23. Un hombre dejó al morir una cantidad de dinero para que se dividiese entre sus 4 hijos. El mayor recibió la mitad de lo que recibieron los otros tres juntos; el segundo hijo recibió la tercera parte de lo que recibieron los otros tres juntos; y el tercer hijo recibió la cuarta parte de lo que recibieron los otros tres. Se descubrió que el mayor recibió $140 más que el menor. ¿Cuál fué el monto de la herencia, y qué cantidad recibió cada hijo?

24. Un negociante ha mezclado dos clases de té. La primera le costó 90 centavos por libra; y la segunda le costó 28 centavos por libra. Toda la mezcla le costó $61.20, y la vende á 50 centavos la libra. Su ganancia es $3.80. ¿Cuántas libras de cada clase de té puso en la mezcla?

25. Dos hombres, A y B, podrían hacer una obra en 15 días, pero despues de haber trabajado juntos 6 días, B abandonó la obra, y A la acabó en 30 días. ¿En cuántos días hubiera hecho la obra cada uno trabajando solo?

26. A, B y C juntos tenían $24. A dió á B y á C una cantidad igual á la que tenían; luego B dió á C y á A una cantidad igual á la que tenían entonces; y luego C dió á A y á B una cantidad igual á la que tenían entonces. Al fin todos tenían cantidades iguales. ¿Qué cantidad tenía cada uno al principio?

27. En cierta elección 826 hombres dividieron sus

votos entre dos candidatos. El candidato electo recibió 174 votos más que el otro. ¿Cuántos votos recibió cada uno?

28. Si cierto lote tuviera 5 decímetros más de largo y 3 decímetros más de ancho, su área tendría un aumento de 156 decímetros cuadrados; pero si tuviera 3 decímetros más de largo y 5 decímetros más de ancho, su área tendría un aumento de 186 decímetros cuadrados. ¿Cuáles son las dimensiones del lote?

29. Cierto número está compuesto de dos guarismos, de los cuales el primero es el mayor. Si se divide el número por la suma de sus guarismos, el cociente será igual á 7; si los guarismos se alternan, y del número que resulta se quitan 12, y la resta se divide por la diferencia de los dos guarismos, el cociente será igual á 9. ¿Cuál es el número?

30 Un campesino compró 100 aras de terreno por $2450; por una parte del terreno pagó $20 por ara, y por otra parte pagó $30 por ara. ¿Cuántas aras tenía cada parte?

31 Los tubos *A*, *B* y *C* corren á un mismo depósito. *A* y *B* pueden llenarlo en 1 hora 10 minutos; A y *C* en 1 hora 24 minutos; *B* y *C* en 2 horas 20 minutos. ¿En cuántas horas lo llenará cada tubo por separado?

32. Dos tubos llenaron una cisterna que contiene 330 litros, el primero corriendo 5 horas, y el segundo 4 horas; los mismos tubos llenaron otra cisterna que contiene 195 litros, el primero corriendo 2 horas, y el segundo tres horas. ¿Qué cantidad derramó cada tubo por hora?

33. *A* y *B* estuvieron construyendo un muro 126 piés de largo. Después de haber trabajado 3 horas, *A* aban-

donó la obra, la cual B concluyó en 14 horas. Si A hubiera trabajado 7 horas, B habría concluido la obra en $4\frac{2}{3}$ horas. ¿Cuántos piés de muro construyó cada uno por hora?

34. Cierto número está compuesto de 3 guarismos. La suma de ellos es 9 ; el número es igual á 42 veces la suma de los primero y segundo guarismos ; y el tercero es igual á dos veces la suma de los otros dos. ¿Cuál es el número?

35. La suma de tres números es 33. La suma del primero con dos veces el segundo, con tres veces el tercero es 74. La suma del primero con cuatro veces el segundo, con 9 veces el tercero es 186. ¿Cuáles son los numeros?

36. Un tren salió de P con dirección á Q. Una hora más tarde otro tren salió de Q con dirección á P corriendo á razón de 10 kilómetros por hora más que el primer tren ; los trenes se encontraron á media distancia entre P y Q. Si el tren que salió de P hubiera salido una hora después del tren que salió de Q, habría sido necesario aumentar su velocidad 28 kilómetros por hora para que los dos trenes se encontrasen á media distancia entre P y Q. ¿Cuál es la distancia entre P y Q?

37. Dividir el número 89 en tres partes, tales que la primera sumada con 35, dos veces la segunda sumado con 5, y cinco veces la tercera sumado con 5, todas sean iguales entre si.

38. Si mi terreno tuviera 10 decámetros más de largo y 5 decámetros más de ancho, tendría 475 aras más de área; pero si tuviera 5 decámetros menos de largo y 10 decámetros menos de ancho, tendría 500 aras menos de área. ¿Cuáles son las dimensiones de mi terreno?

39. Cierto número está compuesto de 3 cifras, de las cuales la primera y tercera son iguales. Si se alternan las cifras de las unidades y las decenas, el número que resulta excederá al número original en 54; pero si se alternan las cifras de las centenas y las decenas, será necesario añadir 9 á cuatro veces el número que resulta, para que sea igual al número original. ¿Cuál es el número?

40. Un tren caminando de A con dirección á B tuvo un accidente y dilató media hora; después corrió con una velocidad igual á los $\frac{6}{5}$ de la que traía antes y llegó á la estación de B 2 horas 30 minutos atrasado. Si hubiera tenido el accidente 30 kilómetros más cerca de A, se habría atrasado 3 horas. ¿Con qué velocidad corría el tren antes del accidente?

41. A, B y C fueron empleados para cortar trigo. El primer dia, A trabajó 2 horas, B, 3, y C, 5, y los tres juntos cortaron una hectara; el segundo día, A trabajó 4 horas, B, 9, y C, 6, y los tres juntos cortaron 2 hectaras; el tercer día. A trabajó 10 horas, B, 12, y C, 5, y los tres juntos cortaron 3 hectaras. ¿En qué tiempo podría cada uno cortar una hectara?

42. A, B, C y D juntos tienen \$14,000; dos veces lo que tiene A más tres veces lo que tiene B más la mitad de lo que tiene C más la quinta parte de lo que tiene D es igual á \$16,000; ó, si se suman lo que tiene A con el duplo de lo que tiene B con el duplo de lo que tiene C con los $\frac{2}{5}$ de lo que tiene D, la suma será igual á \$18,000; ó, la mitad de lo que tiene A sumada con la tercera parte de lo que tiene B más la cuarta parte de lo que tiene C más la quinta parte de lo que tiene D es igual á \$4000. ¿Cuántos pesos tiene cada uno?

43. Si cierto número se divide por la suma de sus dos guarismos, el cociente será 6 quedando como resta 1. Si se invierte el orden de los guarismos y se agregan 8 al número que resulta, la suma dividida por la suma de los guarismos será igual á 6. ¿Cuál es el número?

44. Tres albañiles, A, B y C, construyen una pared. A y B juntos pueden hacer la obra en 12 días; B y C en 20 días, y A y C en 15 días. ¿Cuánto tiempo necesitaría cada uno para hacerla? ¿En cuánto tiempo pueden hacerla los tres si trabajan juntos?

45. Una tripulación puede remar 10 kilómetros en 50 minutos en dirección de la corriente de un río, y 12 kilómetros en una hora y media contra la corriente. ¿Cuál es la velocidad de la corriente, y cuál la de la tripulación en agua quieta?

46. A y B juntos pueden hacer una obra en 8 días. A y C juntos en 9 días, y B y C juntos en 10 días. ¿Cuántos días necesita cada uno para hacerla si trabaja solo?

47. Un número está compuesto de tres guarismos, cuya suma es igual á 11; el guarismo de las unidades es 2 veces el de las centenas; y si se agregan 297 al número, el orden de los guarismos se invierte. ¿Cuál es el número?

48. Se tienen tres chorros de agua para llenar un depósito, cuya capacidad es de 18 metros cúbicos. Los dos primeros juntos producen 175 litros de agua en tres horas y media; el primero y el tercero dan 280 litros en cuatro horas; el segundo y el tercero dan 375 litros en seis horas y cuarto. ¿Cuánto producirá cada chorro por hora? ¿En cuánto tiempo se llenará el depósito si los tres chorros corren juntos?

49. Un hombre remando recorre 30 leguas y vuelve en 12 horas. Nota que recorrió 5 leguas en la dirección de la corriente en el mismo tiempo que recorrió 3 leguas contra la corriente. Encontrar qué tiempo necesita para subir y qué tiempo para bajar.

50. Un hombre remando en dirección y contra la corriente de un río, recorre en ir y volver la distancia de 20 kilómetros en 10 horas; y nota que remaba 2 kilómetros contra la corriente en el mismo tiempo que remaba 3 kilómetros caminando en dirección de la corriente. ¿Cuánto tiempo dilata en ir y cuánto en volver?

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

ECUACIONES PURAS DE SEGUNDO GRADO.

Regla.—Para resolver una ecuación pura de segundo grado:

1° Se quitan los denominadores.

2° Se pasan al primer miembro de la ecuación todos los términos que contienen la incógnita, y al otro los que no la contienen.

3° Se reunen en un solo término todos los términos que contienen la incógnita, y se reduce el segundo miembro de la ecuación á la forma más simple.

4° Se divide cada miembro de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

5° Se extrae la raíz cuadrada de cada miembro de la ecuación.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

1. $x^2 - 16 = 20.$

2. $x^2 - 3 = 46.$

3. $3x^2 - 10 - x^2 = 12 + 4x^2 - 54.$

4. $2(x^2 - 1) - 3(x^2 + 1) + 14 = 0.$

5. $\frac{3x^2}{8} + 8 = x^2 - 2.$

6. $x^2 + 1 = \frac{x^2}{4} + 4.$

7. $\frac{ax^2(a-2)}{1+x} = 1 - x.$

8. $\frac{x^2}{2} - 3 + \frac{5x^2}{12} = \frac{7}{24} - x^2 + \frac{335}{24}.$

9. $\frac{14x^2+16}{21} - \frac{2x^2+8}{8x^2-11} = \frac{2x^2}{3}.$

10. $\frac{3x^2+5}{10} - \frac{2x^2-5}{10} = 1.$

11. $\frac{5}{4+x} + \frac{5}{4-x} = \frac{8}{3}.$

12. $\frac{2x^2-5}{3} - \frac{3x^2+2}{7} - \frac{x^2-10}{6} = 0.$

13. $\frac{4x^2-3}{2x^2-1} = \frac{2(9x^2+2)}{3(3x^2+2)}.$

14. $\frac{10x^2+17}{18} - \frac{12x^2+2}{11x^2-8} = \frac{5x^2-4}{9}.$

15. $\frac{5x^2-1}{x^2-3} - \frac{3x^2+1}{x^2+2} - \frac{89}{(x^2-3)(x^2+2)} = 2.$

16. $13 - \sqrt{3x+16} = 5.$

17. $\sqrt{a+x} - \sqrt{x+\sqrt{x^2+b^2}}.$

18. $x + \sqrt{x^2+3} = \frac{6}{\sqrt{x^2+3}}.$

19. $\frac{\sqrt{3x^2+4}+2}{\sqrt{3x^2+4}-2} = 3.$

20. $\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}.$

ECUACIONES COMPLETAS DE SEGUNDO GRADO.

Regla.—Para resolver una ecuación completa de segundo grado :

1° Se quitan los denominadores :

2° Se trasladan al primer miembro los términos que contienen la incógnita y al segundo los demás.

3° Se sacan x^2 y x como factores comunes, se hace que el cuadrado de la incógnita no tenga coeficiente, y que sea positivo.

4° Se completa el cuadrado agregando á los dos miembros de la ecuación el cuadrado de la mitad del factor de x.

5° Se extrae la raíz cuadrada de los dos miembros, y se despeja x.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones :

1. $x^2+4x=12.$

2. $x^2-4x=45.$

3. $x^2-5x=-4.$

4. $x^2-15x=-54.$

5. $3x^2-4x=4.$

6. $12x^2+x-1=0.$

7. $2x^2-27x=14.$

8. $14+15x-9x^2=0.$

9. $x^2-12x+6=\frac{1}{4}.$

10. $x^2-\frac{5}{6}x=\frac{1}{6}.$

11. $\frac{240}{x}+\frac{2}{5}=\frac{216}{x-15}.$

12. $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}+\frac{1}{24}=0.$

13. $x^2-\frac{2x}{3}+\frac{1}{12}=0.$

14. $x+\frac{300}{x}+73=3\left(\frac{x-300}{x}\right)$.

15. $\frac{2x+3}{8+x}-\frac{2x+9}{3x+4}=0$.

16. $\frac{3x}{4}+\frac{4}{3x}-\frac{13}{6}$.

17. $7(x+7)+\frac{7(3x+50)}{x}=0$.

18. $\frac{6}{x-1}-\frac{18}{x+5}=\frac{7}{x+1}-\frac{8}{x-5}$.

19 $\frac{5}{x}-\frac{3x+1}{x^2}=\frac{1}{4}$.

20. $\frac{2x+9}{9}+\frac{4x-3}{4x+3}=3+\frac{3x-16}{18}$.

21. $\frac{3x}{2(x+1)}-\frac{5}{8}=\frac{3x}{x^2-1}-\frac{23}{4(x-1)}$.

22. $\frac{3x}{x-7}-\frac{1-8x}{10}=\frac{x}{5}$.

23. $\frac{2x-1}{x-1}+\frac{1}{6}=\frac{2x-3}{x-2}$.

24. $\frac{7}{x^2-4}-\frac{3}{x+2}=\frac{22}{5}$.

25. $\frac{1}{2}(8-x)-\frac{2x-11}{x-3}=\frac{1}{6}(x-2)$.

26. $\frac{2x}{15}+\frac{3x-50}{3(10+x)}=\frac{12x+70}{190}$.

27. $\frac{2x-1}{x}-\frac{3x}{3x-1}+\frac{1}{2}=0$.

28. $\frac{x+12}{x}+\frac{x}{x+12}=5\frac{3}{15}$.

29. $\frac{12+5x}{12-5x}+\frac{2+x}{x}=\frac{1}{1-5x}.$

30. $\frac{x}{x^2-1}=\frac{15-7x}{8(1-x)}.$

31. $\frac{x+1}{x+2}-\frac{x+3}{x+4}=\frac{8}{3}.$

32. $\frac{2}{5}(3x^2-x-5)-\frac{1}{3}(x^2-1)-2(x-2)^2.$

33. $\frac{x+3b}{8a^2-12ab}-\frac{3b}{9b^2-4a^2}-\frac{a+3b}{(2a+3b)(x-3b)}=0.$

34. $abx^2+\frac{3a^2x}{c}=\frac{6a^2+ab-2b^2}{c^2}-\frac{b^2x}{c}.$

35. $9x^{-2}-12x^{-1}=-3.$

36. $(3a^2+b^2)(x^2-x+1)=(3b^2+a^2)(x^2+x+1).$

37. $\frac{1}{2x^2+x-1}+\frac{1}{2x^2-3x+1}=\frac{a}{2bx-b}-\frac{2bx+b}{ax^2-a}.$

38. $(\sqrt{x+5})(\sqrt{x+12})=12.$

39. $3\sqrt{x+6}+2=x+\sqrt{x+6}.$

40. $\sqrt{x-4ab}=\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{x}}.$

41. $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+2a}=\sqrt{2x+3a}.$

42. $y+\frac{1}{y}=\frac{4}{\sqrt{3}}.$

43. $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}=\sqrt{2x}.$

44. $\frac{1}{a+\sqrt{a^2-x}}+\frac{1}{a-\sqrt{a^2-x}}=1+\frac{x}{a}.$

45. $x+16-7\sqrt{x+16}=10-4\sqrt{x+16}.$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON VARIAS INCÓGNITAS.

CASO I.

Cuando una de las ecuaciones es de primer grado.

Regla.—Se saca de la ecuación que es de primer grado el valor de una de las incógnitas en función de la otra. Se sustituye este valor en la otra ecuación.

Resuélvanse las ecuaciones siguientes :

1. $2x^2 - xy = 6y.$
   $x + 2y = 7.$

2. $x + y = 13.$
   $xy = 36.$

3. $x + y = 7.$
   $x^2 + 2y^2 = 34.$

4. $2x^2 - 3y^2 = -10.$
   $3x + y = 1.$

5. $x - 3y = 1.$
   $xy + y^2 = 5.$

6. $2x^2 + xy - 5y^2 = 20.$
   $2x - 3y = 1.$

7. $x^2 + 3xy - y^2 = 23.$
   $x + 2y = 7.$

8. $x + y = 12.$
   $x^2 + y^2 = 104.$

9. $3x^2 - 2xy = 15.$
   $2x + 3y = 12.$

10. $4y - 5x + 1.$
$2xy = 33 - x^2.$

CASO II.

Cuando las ecuaciones son simétricas con respecto á x é y.

Regla.—Se sustituye por una de las incógnitas la suma de dos otras, y por la otra incógnita se sustituye la diferencia de estas nuevas incógnitas.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones :

1. $x + y = 2.$
$xy = -15.$

2. $x^3 + y^3 = 18xy.$
$x + y = 12.$

3. $x^2 + y^2 = 52.$
$x + y + xy = 34.$

4. $x^2 + xy = 35.$
$xy - y^2 = 6.$

5. $x^3 + y^3 = -386.$
$x + y = -2.$

6. $4(x + y) = 3xy.$
$x + y + x^2 + y^2 = 26.$

7. $x^2 - xy + y^2 = 48.$
$x - y - 8 = 0.$

8. $x^3 + y^3 = -19.$
$x^2 - xy + y^2 = 19.$

9. $x + y = 4.$
$x^4 + y^4 = 82.$

10. $x - y = 3.$
$x^4 + y^4 = 641.$

11. $x^2+y^2=193.$
$x+y=-5.$

12. $x^3+y^3=9.$
$x+y=3.$

13. $x^2+3xy+y^2=1.$
$3x^2+xy+3y^2=13.$

14. $x^2+x+y=18-y^2.$
$xy=6.$

15. $x^2+y^2=85.$
$xy=42.$

16. $xy(x+y)=30.$
$x^3+y^3=35.$

17. $x^3-y^3=98.$
$x-y=2.$

CASO III.

Cuando las dos ecuaciones son de segundo grado y homogéneas.

Regla.—Se sustituye por una de las incógnitas el producto de la otra por una nueva incógnita, como v.

Resuélvanse las siguientes ecuaciones :

1. $3x^2+xy=18.$
$4y^2+3xy=54.$

2. $x^2-2xy=5.$
$x^2+y^2=29.$

3. $2y^2-4xy+3x^2=17.$
$y^2-x^2=16.$

4. $x^2-4y^2=9.$
$xy+2y^2=3.$

5. $6x^2 - 5xy + 2y^2 = 12.$
$3x^2 + 2xy - 3y^2 = -3.$

6. $x^2 + xy - y^2 = 1.$
$x^2 - xy + 2y^2 = 8.$

7. $x^2 + xy + 2y^2 = 44.$
$2x^2 - xy + y^2 = 16.$

8. $x^2 + xy = 84.$
$x^2 - y^2 = 24.$

9. $x^2 + xy + 4y^2 = 6.$
$3x^2 + 8y^2 = 14.$

10. $x^2 - 4y^2 - 9 = 0.$
$xy + 2y^2 - 3 = 0.$

EJERCICIOS DIVERSOS.

1. $x^3 - y^3 = 19.$
$x^2y - xy^2 = 6.$

2. $x^2 + xy + y^2 = 37.$
$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481.$

3. $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 23.$
$xy = 6.$

4. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x = 120 - 2y.$
$xy - y^2 = 8.$

5. $x^2 + y^2 = 7 + xy.$
$x^3 + y^3 = 6xy - 1.$

6. $x^4 + y^4 = 97.$
$x + y = -1.$

7. $\frac{x^4}{y^2} + 2\frac{x^2}{y} = 9\frac{39}{49}.$
$x^2 + y^2 = 65.$

8. $x^2 - xy + y^2 = 19.$
$2x^2 - y^2 = -17.$

9. $10x^2 + 15xy = 3ab - 2a^2.$
$10y^2 + 15xy = 3ab - 2b^2.$

10. $x^2 + xy + y^2 = 26.$
$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 364.$

11. $x^2 + 3xy = -14.$
$xy + 4y^2 = 30.$

12. $x^2 - y^2 = 4ab.$
$xy = a^2 - b^2.$

13. $xy + xy^2 = 12.$
$x + xy^3 = 18.$

14. $x^2 + y^2 + x + y = 18.$
$xy = 6.$

15. $3xy + 2x + y = 485.$
$3x - 2y = 0.$

16. $x^2y^2 = 180 - 8xy.$
$x + 3y = 11.$

17. $2x^2 - 7xy - 2y^2 = 5.$
$3xy - x^2 + 6y^2 = 44.$

18. $x + y = a.$
$x^2 + y^2 = b^2.$

19. $x^2 + 3x + y = 73 - 2xy.$
$y^2 + 3y + x = 44.$

20. $x^3 - y^3 = 6a^2b + 2b^3.$
$xy(x - y) = 2a^2b - 2b^3.$

PROBLEMAS.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA Ó MÁS INCÓGNITAS.

1. Encontrar dos números cuyo producto sea 126, y el mayor dividido por el menor sea igual á 3.

2. El vidrio de un espejo rectangular tiene 18 pulgadas de largo y 12 de ancho. El marco en todas sus partes es del mismo ancho, y su área es igual al área del vidrio. Se quiere saber el ancho del marco.

3. El área de cierto cuadrado se duplica añadiendo 6 pulgadas á su largo y 4 pulgadas á su ancho. Determinar uno de los lados del cuadrado.

4. La suma de los cuadrados de dos números es igual á 370, y la diferencia de sus cuadrados es igual á 208. ¿Cuáles son los números?

5. Un comerciante vendió cierta cantidad de harina por la suma de $39, y el tanto por ciento de la ganancia fué igual á lo que pagó por la harina. ¿Cuánto costó la harina?

6. El largo de un terreno rectangular excede al ancho 3 metros, y el área del terreno es de 4,006 kilómetros cuadrados. ¿Cuál es el largo y el ancho del terreno?

7. *A* y *B* se comprometieron á trabajar cierto número de días. *A* perdió 4 días y recibió $18.75. *B* perdió 7 días y recibió $12. Si *A* hubiera perdido 7 días y *B* 4 días, habrían recibido cantidades iguales. ¿Cuántos días se comprometieron á trabajar y qué cantidad diaria recibieron?

8. Cierta compañía se comprometió á construir un buque por $6300; pero habiendo muerto dos socios de la compañía, cada uno de los que quedaron tuvo que contribuir $200 más de lo que importó su cuota. ¿De cuántos socios se formó la compañía al principio?

9. Dividir el número 35 en dos partes, de tal modo que la suma de los dos cocientes obtenidos dividiendo cada parte por la otra, sea igual á $2\frac{1}{12}$.

10. Dos viajeros, A y B, salen de dos ciudades lejanas al mismo tiempo. Al encontrarse se descubrió que A caminó 18 kilómetros más que B; y que A habría podido caminar en $15\frac{3}{4}$ días la distancia recorrida por B, y que B habría ocupado 28 días en caminar la distancia recorrida por A. ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades?

11. Una compañía de soldados que marchaba en columnas regulares, tenía en cada fila 6 hombres menos que el número de filas. Al presentar el enemigo el número de filas fué reducido á 4, cada fila teniendo 870 hombres más que antes. ¿De cuántos hombres se componía la compañía?

12. La suma de los cubos de dos números es igual á 341, y la suma de sus cuadrados excede á su producto 31. Encontrar los números.

13. Cada uno de los dos términos de un quebrado excede en 1 á los términos de otro quebrado, y la suma de los dos quebrados es igual á $1\frac{8}{21}$. ¿Cuáles son los quebrados?

14. Hay dos números cuya suma multiplicada por el mayor da 240, y cuya diferencia multiplicada por el menor da 32. ¿Cuáles son los números?

15. Un hombre rema en dirección de la corriente de

un río 12 kilómetros en 4 horas menos del tiempo que ocupa en volver. Si su velocidad fuera doble, remaría en la dirección de la corriente 10 kilómetros por hora. Encontrar la velocidad de la corriente, y con qué velocidad caminaría el hombre si remara sin la ayuda de la corriente.

16. Un número está compuesto de dos guarismos. La suma de los cuadrados de ellos es 53, y su producto es 14. Encontrar el número.

17. *A* hace una obra en 9 horas menos que el tiempo que *B* requiere para hacerla, y los dos juntos pueden hacerla en 20 horas. ¿En cuántas horas puede hacerla cada uno trabajando solo?

18. Un hombre vendió un reloj por $21, y perdió por ciento, tanto cuanto le costó el reloj. ¿Cuánto le costó el reloj?

19. Si á cierto número se añade y de él se quita la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado del número y 2, la suma de las recíprocas de los resultados será igual á la $\frac{1}{15}$ parte del número mismo. ¿Cuál es el número?

20. Una barra de hierro pesa 36 libras. Si hubiera tenido 1 pié más de largo, cada pié habría pesado media libra menos. Encontrar la longitud de la barra y el peso de cada pié.

21. Encontrar el radio de un círculo cuya área sería duplicada si el radio tuviera una pulgada más de largo.

22. Un hombre sacó cierta cantitad de vino de un bote lleno que contenía 256 litros; entonces llenó el bote de agua, y volvió á sacar el mismo número de litros, y así sucesivamente repitió la operación cuatro veces,

hasta que solo quedaron 81 litros de vino puro. ¿Qué tanto de vino puro sacó cada vez?

23. Un hombre compró cierto número de ovejas por $72. Si hubiera comprado 6 más con la misma cantidad de dinero, cada oveja habría costado un peso menos. ¿Cuántas ovejas compró?

24. Hay tres números; la diferencia de sus diferencias es igual á 5; la suma de ellos es igual á 44; y su producto es igual á 1950. ¿Cuáles son los números?

25. Dos tubos corriendo juntos pueden llenar una cisterna en 2 horas 55 minutos. Si el tubo mayor corre solo la llenará en 2 horas menos que el tiempo que requiere el tubo menor para llenarla. ¿En cuánto tiempo llenará la cisterna cada tubo si corre solo?

26. La circunferencia de la rueda de un carruaje es de 15 decímetros. Si ocupa un segundo más en dar una vuelta, el carruaje caminará 1.8 kilómetros menos por hora. ¿Cuál es la velocidad del carruaje?

27. Encontrar dos números el producto de los cuales sea igual á la diferencia de sus cuadrados, y la suma de sus cuadrados sea igual á la diferencia de sus cubos.

28. Si al largo y al ancho de un rectángulo se agrega 1, el área será igual á 84; si del largo y del ancho se resta 1, el área será igual á 50. ¿Cuál es el largo y cuál el ancho del rectángulo?

29. Un hombre vendió 50 libras de café y 70 libras de azúcar por $19.50; pero el número de libras de café que vendió por $5 era igual al número de libras de azúcar que vendió por $2. ¿Cuánto recibió por libra de cada artículo?

30. Dos muchachos corren en direcciones opuestas alrededor de un terreno cuya área es de 6 aras; salen de

una esquina y se encuentran á la distancia de 5 metros de la otra; uno corre los $\frac{9}{11}$ tan aprisa como el otro. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?

31. Una persona tiene dos lotes cuadrados de tamaños desiguales, conteniendo 15,025 piés cuadrados. Si estuvieran contiguos los lotes, se necesitaría una muralla 530 piés de largo para cercarlos por los seis lados. ¿Cuál es el área de cada lote?

32. El grueso de un sólido rectangular es igual á los $\frac{2}{3}$ de su ancho, y el largo es igual á la suma del ancho con el grueso; también, el número de decímetros cúbicos que tiene, más el número de decímetros lineales que tienen sus aristas, es igual á los $\frac{65}{31}$ del número de decímetros cuadrados que tienen sus caras. Determinar las dimensiones del sólido.

33. ¿Cuál es el número que, dividido por el producto de sus dos guarismos da 2, y al cual si se agregan 27, el orden de los guarismos será invertido?

34. La suma de los cuadrados de dos números es igual á 106, y la diferencia de sus cuadrados es igual á los $\frac{7}{2}$ del cuadrado de su diferencia. Encontrar los números.

35. La suma de las áreas de dos terrenos cuadrados es de 1205 decámetros cuadrados, y se necesitan 196 decámetros de muralla para cercarlos. ¿Cuál es el área de cada terreno? ¿Cuál será el valor de cada terreno si el ara cuesta $2.25?

36. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual á 50, y el área del triángulo es igual á 72. Determinar los catetos.

37. La suma de los términos de un quebrado es igual á 18. Si á cada término se agrega 1, y el quebrado que

resulta se multiplica por el quebrado original, el resultado será $\frac{14}{33}$. ¿Cuál es el quebrado?

38. La suma de dos números es igual á 9, y la suma de las cuartas potencias de los mismos números es igual á 1377. ¿Cuáles son los números?

39. Se dice que el género, cuando está mojado, se encoge y pierde la octava parte de su largura y la $\frac{1}{16}$ parte de su anchura. Si de esta manera una pieza de género ha perdido $5\frac{3}{4}$ varas cuadradas de superficie, y la longitud de los cuatro lados se ha disminuido $4\frac{1}{4}$ varas, ¿Cuáles eran la longitud y la anchura del género antes de mojarse?

40. Hallar dos números cuya diferencia multiplicada por la diferencia de sus cuadrados dé 80, y la suma multiplicada por la suma de sus cuadrados dé 4040.

41. Hallar dos números cuya suma multiplicada por el menor sea igual á 4 veces el mayor, y la suma multiplicada por el mayor sea igual á 9 veces el menor.

42. Una persona vende un anillo en 11 pesos, y haciendo la cuenta de la ganancia que ha obtenido sobre el precio de compra, resulta que ha ganado por 100, tanto cuanto le costó el anillo. ¿Cuál era el precio del anillo?

43. Encontrar dos números de modo que restando la suma de sus cuadrados de 3 veces su producto, la resta sea 72; y restando la diferencia de sus cuadrados de 2 veces su producto, la resta sea 60.

44. La suma de dos números es 6, y la suma de las quintas potencias de los mismos números es 1056. ¿Cuáles son los números?

45. Un terreno rectangular contiene 2125 aras. Si á su largo se agregan 4 decámetros y á su ancho 3 decá-

metros, el área será 2492 aras. Encontrar el largo y el ancho del terreno.

46. La suma, el producto y la diferencia de los cuadrados de dos números son iguales entre sí. ¿Cúales son los números?

47. La diferencia de dos números es igual á 4, y el cuadrado de su cociente sumado con 4 veces su cociente es igual á 12. ¿Cuáles son los números?

48. Hallar dos números de tal modo que sumando su producto con la suma, ésta sea 71, y restando la suma de la suma de sus cuadrados, la resta sea 130.

49. Dividir el número 15 en dos partes tales que la suma de sus cuadrados sea igual á 117.

50. La suma de los cuadrados de tres números consecutivos es igual á 365. Encontrar los números.

51. Encontrar dos números cuya suma sea al mayor como 10 : 7, y cuya suma multiplícada por el menor dé 270.

52. Un hombre cortó dos montones de leña que contenían 26 esterios, y recibió $35.60 por su trabajo. El trabajo de cada montón costó tantos décimos por esterio como esterios contenía el montón. Se quiere saber cuántos esterios contenía cada montón.

53. Un muchacho compró cierto número de manzanas por 16 centavos. Si hubiera recibido 4 más con la misma cantidad de dinero, cada manzana le habría costado la tercera parte de un centavo menos. ¿Cuántas manzanas compró?

54. Dividir el número 14 en dos partes tales que la mayor dividida por la menor sea á la menor dividida por la mayor como 16 es á 9.

55. La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es igual á 113. ¿Cuáles son los números ?

56. Unos hombres estaban edificando una pared 540 metros de largo. Si hubieran hecho 15 metros más al día, habrían acabado la pared en 6 dias menos. ¿Cuántos metros hicieron cada dia ?

57. Encontrar dos números tales que si su diferencia se multiplica por el menor, el producto sea 42, y si se multiplica por su suma el producto sea 133.

PROPORCIONES.

1. Hállese una cuarta proporcional á $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{7}$.

2. Hállese una tercera proporcional á $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{6}$.

3. Hállese una media proporcional entre 8 y 18.

4. Hállese una media proporcional entre 14 y 42.

5. Hállese una media proporcional entre $2\frac{2}{9}$ y $\frac{5}{12}$.

Hállese el valor de la incógnita en las proporciones siguientes :

6. $x : 18 :: 6 : 27.$

7. $2x-5 : 3x+2 :: x-1 : 7x+1.$

8. $x+5 : 2x-3 :: 5x+1 : 3x-3.$

9. $x^2+4 : x^2-11 :: 100 : 40.$

10. $x^2-4 : x^2-9 :: x^2-5x+6 : x^2+4x+3.$

11. $x+a : 2x-b :: 3x+b : 4x-a.$

12. $\sqrt{x}+\sqrt{b} : \sqrt{x}-\sqrt{b} :: a : b.$

13. $\frac{1}{3}(11+x^2) : \frac{1}{7}(4x^2-2) :: 5 : 2.$

14. $\left\{\begin{array}{l} x : y :: 3 : 5. \\ x : 4 :: 15 : y. \end{array}\right\}$

15. $\frac{1}{2}(x^2-5)^2 : x^2-5 :: 2 : 1.$

16. $\left\{\begin{array}{l} x : 27 :: y : 9. \\ x : 27 :: 2 : x - y. \end{array}\right\}$

17. $x + \sqrt{1 - x^2} : x - \sqrt{1 - x^2} :: a + \sqrt{b^2 - a^2} : a - \sqrt{b^2 - a^2}.$

18. $x^2 - 4x + 2 : x^2 - 2x - 1 :: x^2 - 4x : x^2 - 2x - 2.$

19. $12 - x^2 : \frac{1}{2}x^2 :: 100 : 25.$

20. $x^2 + x + 1 : x^2 - x - 1 :: x^2 - x + 2 : x^2 + x - 2.$

PROBLEMAS.

1. Dividir el número 50 en dos partes de modo que la mayor más 3 sea á la menor menos 3, como 3 es á 2.

2. Dividir el número 60 en dos partes de modo que estén entre sí en la relacíon que 2 es á 3.

3. El producto de dos números es igual á 364. La suma de ellos es á su diferencia como 12 es á 3. ¿Cuáles son los números ?

4. Un hombre tiene 25 años y su hermano tiene 15. ¿En cuántos años estarán las edades de los dos en la relación que 5 es á 4 ?

5. Un pasajero nota que un tren que camina en la dirección opuesta le pasa en 2 segundos. Si hubiera caminado en la misma dirección le habría pasado en 30 segundos. Compárense las velocidades de los dos trenes.

6. Un hombre tiene dos rebaños, con igual número de ovejas cada uno ; después de haber vendido 80 ovejas de uno de los rebaños y 20 del otro, el número de ovejas en los dos rebaños quedó en la misma relación que 2 es á 3. ¿Cuántas ovejas tenía cada rebaño al principio ?

7. Dividir el número 12 en dos partes de tal modo que su producto sea á la suma de sus cuadrados como 3 es á 10.

8. ¿ Cuál es el número al cual si se agregan 1, 5 y 13 respectivamente, la segunda suma será media proporcional entre las otras dos ?

9. Si $a-b : b-c :: b : c$, demostrar que b es media proporcional entre a y c.

10. Encontrar dos números de los cuales el mayor será al menor como su suma es á 42 ; y como su diferencia es á 6.

11. Hay dos números cuyo producto es igual á 96, y la diferencia de sus cubos es al cubo de su diferencia como 19 es á 1. ¿Cuáles son los números ?

PROGRESIÓN ARITMÉTICA.

1. Determínense la suma y el 27° término de la progresión 8. 5. 2.....

2. Determínense la suma y el 11° término de una progresión cuya razón es 3 y el primer término es 2.

3. Determínense la suma y el 15° término de una progresión cuyo primer término es 1 y la razón es 5.

4. Determínense la suma y el último término de una progresión cuyo primer término es 7, la razón es 4 y el número de términos son 20.

5. Determínense la suma y el número de términos de una progresión cuyo primer término es 8, el último término es 203, y la razón es 5.

6. Determínense el último término y la razón de una progresión cuyo primer término es $-\frac{5}{3}$, el número de términos son 20, y la suma de los términos es $-\frac{5}{3}$.

7. Determínense el primer término y la razón de una progresión cuyo último término es 1, el número de términos son 34, y la suma de los términos es 1717.

8. Determínense la suma y el último término de una progresión cuyo razón es $\frac{1}{4}$, el primer término es $\frac{1}{4}$, y el número de términos son 35.

9. Determínense el primer término y el número de términos de una progresión cuya razón es -3, el último término es -39, y la suma de los términos es -264.

10. Determínense la suma de los términos de una progresión cuyo primer término es 1, el número de términos son 1000, y la razón es 1.

11. Conociendo que el primer término de una progresión es 100, el número de los términos son 21, y la suma de los términos es 1260, determínense la razón y el último término.

12. Determínense el primer término y la suma de una progresión cuya razón es 4, el último término es 75, y el número de términos son 19.

13. Determínense la razón y la suma de una progresión cuyo primer término es $-\frac{2}{3}$, el número de términos son 18, y el último término es 5.

14. Si se conoce que el primer término de una progresión es -7, la razón es -7, y el número de términos son 101. ¿Cúal será la suma de la progresión?

15. Determínense el primer término y el número de términos de una progresión cuyo último término es -47, la razón es -1, y la suma de los términos es -1118.

16. El primer término de una progresión es 6, la razón es $-\frac{5}{3}$, y la suma es $-\frac{203}{3}$; se quiere determinar el número de términos y el último término.

17. Determínense el primer término y el número de términos de una progresión cuyo último término es $\frac{7}{2}$, la razón es $\frac{1}{3}$, y la suma de los términos es 20.

18. Determínense el primer término y el último término de una progresión cuya razón es -4, el número de términos son 17, y la suma de los términos es -493.

19. Interpólense 5 medios aritméticos entre 2 y 4.

20. Interpólense 8 medios aritméticos entre 3 y 21.

21. Interpólense 7 medios aritméticos entre 3 y -1.

22. Interpólense 3 medios aritméticos entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$.

23. Interpólense 4 medios aritméticos entre -1 y -7.

24. Interpólense 6 medios aritméticos entre -8 y -4.

25. Interpólense 8 medios aritméticos entre $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{13}{10}$.

26. Encontrar cuatro números consecutivos de una progresión aritmética, de modo que el producto de sus extremos sea 45, y el producto de sus medios sea 77.

27. Dos personas, A y B, parten juntos de la misma ciudad, y caminan en la misma dirección. A camina 40 kilómetros por día; B camina 20 kilómetros el primer día, y aumenta su velocidad cada día $\frac{3}{4}$ de kilómetro. ¿Al fin de 40 días, cuántos kilómetros estarán distantes uno de otro, y cuál estará adelante?

28. Un número se compone de tres guarismos que forman una progresión aritmética. Este número dividido por la suma de los guarismos es igual á 26; pero si se le agregan 196, los guarismos de las unidades y las centenas se reemplazarán recíprocamente. ¿Cuál es el numero?

29. A y B viven á la distancia de 343 kilómetros uno de otro; salen al mismo tiempo para encontrarse. Sus jornadas diarias forman progresiones aritméticas. A camina 2 kilómetros cada día más que el día anterior, y B camina 5 kilómetros cada día menos que el día anterior. El día en que se encuentran cada uno camina 20 kilómetros. ¿Cuántos días durará el viaje?

30. Los tres guarismos de cierto número forman una progresión aritmética; el primer guarismo excede á la suma del segundo con el tercero en 1; y si del número se restan 594, el orden de los guarismos se invertirá. Encontrar el número.

31. Se han colocado 100 naranjas en línea recta á la distancia de 2 metros una de otra, y la primera á la

distancia de 2 metros de una canasta. ¿Qué distancia tendrá que recorrer un muchacho, que partiendo de la canasta las recoge y las deposita una por una en la canasta ?

32. La suma de los cuadrados de los extremos de una progresión aritmética compuesta de cuatro términos es 200, y la suma de los cuadrados de los medios es 136. ¿Cuáles son los números ?

33. Un cuerpo al caer en el espacio recorre $16\frac{1}{2}$ piés en el primer segundo de su caída, en el segundo $32\frac{1}{6}$ piés más que en el anterior y así sucesivamente. ¿Cuántos piés recorrerá en 20 segundos ?

34. Una persona economiza $270 el primer año, $210 el segundo año, y así sucesivamente. ¿En cuántos años puede otra persona que economiza $180 al año economizar la misma cantidad que la primera persona ?

35. Encontrar tres números que forman una progresión aritmética, de modo que la suma de los cuadrados del primero y tercero exceda al segundo en 123, y el segundo exceda en 6 á la tercera parte del primero.

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA.

1. Determínense la razón y la suma de una progresión cuyo primer término es -2, el número de términos son 5, y el último término es -32.

2. Determínese el sexto término de la progresión $3:6:12\ldots\ldots$

3. El primer término de una progresión es 2, la razón es 3, y el número de términos son 6. Determínense el último término y la suma de los términos.

4. El último término de una progresión es 256, la razón es 2, y el número de términos son 10. Determínense el primer término y la suma de los términos.

5. Determínese la suma de los ocho primeros términos de la progresión $3:6:12\ldots\ldots$

6. El último término de una progresión es 62,500, la razón es 5, y el número de términos son 7. Determínense el primer término y la suma de la progresión.

7. Determínense el primero y el último términos de una progresión cuya razón es -2, el número de términos son 6, y la suma es $\frac{63}{2}$.

8. La suma de los cuatro primeros términos de una progresión es 200, y el primer término es 5. Determínese la razón.

9. Determínese la suma de los diez primeros términos de la progresión $8:4:2:1:\ldots\ldots$

10. El número de términos de una progresión son 7, el primero término es 2, y el último término es 1458. Determínense la razón y la suma de los términos.

11. Determínese el 12° término de la progresión $x^2 : x^4 : x^5 : \ldots\ldots$

12. Conociendo que el primer término de una progresión es 4, el último término es 324, y el número de términos son 5, determínese la razón.

13. Determínense el primer término y el número de términos de una progresión cuyo último término es -128, la razón es 2, y la suma de los términos es -255.

14. Determínese el octavo término de la progresión $1 : -2 : 4 \ldots\ldots$

15. Determínese la suma de la progresión $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} \ldots\ldots$ hasta lo infinito.

16. Interpólense 5 medios geométricos entre 3 y 192.

17. Interpólense 7 medios geométricos entre $\frac{3}{2}$ y $\frac{3}{512}$.

18. Interpólense 4 medios geométricos entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

19. Interpólense 5 medios geométricos entre $\frac{1}{2}$ y $364\frac{1}{2}$.

20. Interpólense 5 medios geométricos entre -2 y -128.

21. Hay cuatro números que forman los cuatro términos consecutivos de una progresión geométrica; el cuarto número excede al segundo 24, y la suma de los extremos es á la suma de los medios como 7 es á 3. Encontrar los números.

22. Una persona ofreció vender su caballo bajo las condiciones siguientes: pedía 1 centavo por el primer clavo de las herraduras, 2 por el segundo, 4 por el tercero, y así sucesivamente fué doblando por cada clavo, hasta el 32° y último. ¿Cuál fué el precio del caballo?

23. Dividir el número 39 en tres partes de modo que

formen una progresión geométrica y que la tercera parte exceda á la primera en 24.

24. El producto de tres números que forman una progresión geométrica es igual á 64, y la suma de los cuadrados del primero y tercero es igual á 68. ¿Cuáles son los números ?

25. La diferencia de dos números es igual á 48, y el medio aritmético entre ellos excede al medio geométrico en 18. Encontrar los números.

Obras Publicadas en Castellano

LIBRARY OF CONGRESS
0 003 619 354 2

I

SPANISH-AMERICA

ARITMÉTICA

Por A. G.

La obra más práctica para el [illegible] de la asignatura.

EL NIÑO ILUSTRADO.—*Serie cientifica de libros de lectura y la mas avanzada y racional que se conoce. Por Jose M. Trigo.*

COMPENDIO RAZONADO DE LA GRAMÁTICA CASTELLANA.

Obra compuesta por varios literatos y de Acuerdo con la Academia Española, pero arreglada á las necesidades de los sistemas modernos de la enseñanza.

GEOGRAFÍA FÍSICA UNIVERSAL,

Por JOSÉ M. TRIGO.

Esta obra superior á cualquiera otra en su género forma un hermoso tomo en 4° mayor con 10 mapas coloreados de 41x23 centímetros, 10 mapas menores, relieves, planos, perfiles y unos 50 grabados en madera. Precio $1.50 oro.

PÍDANSE CATÁLOGOS.

SPANISH-AMERICAN EDUCATIONAL CO.,

200-212 PINE STREET,

SAINT LOUIS, MO., E. U. de A.